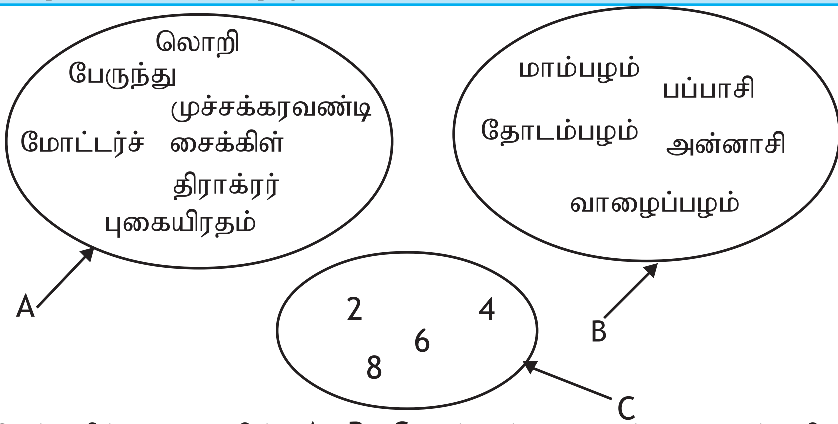
19 தொடைகள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- ★ தொடைகளுடன் தொடர்புபட்ட குறியீடுகள்
- ★ அகிலத்தொடை
- ★ சூனியத் தொடை
- ★ தொடையின் முதலிமை

என்பன பற்றிய விளக்கத்தைப் பெறுவீர்கள்.

19.1 தொடையின் அறிமுகம்



மேற்குறித்த உருவில் A, B, C என்னும் அடைத்த உருக்களினுள்ளே இருக்கும் பொருள்களைக் கவனமாகப் பார்க்க.

A, B, C ஆகியவற்றில் உள்ள பொருள்களை தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு கூட்டமாக நிச்சயித்துக்கூற முடியுமா?
வேறுபடுத்தப்பட்டனவும் தரையில் செல்வனவுமான வாகனங்கள் A யில் உள்ளன. இதற்கேற்ப A ஆனது தரையில் செல்லும் வாகனங்களின் தொடை என அழைக்கப்படலாம்.

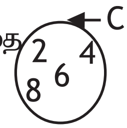
B ஆனது பழங்களின் தொடையும் C ஆனது 10 இலும் குறைந்த நேர் இரட்டை எண் தொடையுமாகும்.

நிச்சயித்து இனங்காணக் கூடிய பொருட்களின் தொகுதி தொடை எனப்படும். என தரம் 7 இல் கற்றுள்ளீர்கள்.

தொடை ஒன்றிலுள்ள உறுப்புகள் அதன் மூலகங்கள் என அழைக்கப்படும். தொடை ஒன்றினுள் ஒரு மூலகம் ஒருமுறை மட்டும் எழுதப்படும்

" இலவசப் பாடநூல் விநியோகத்திற்காக "

C ஆனது 10 இலும் குறைந்த நேர் இரட்டை எண்களின் தொடை என்பதை



என ஒரு வென் வரிப்படத்தில் காட்டலாம்.

இத்தொடையின் மூலகங்களாகிய 2 , 4 , 6, 8 ஆகியவற்றை அடைத்த உரு இல்லாமல் ஒரே நிரையில் எழுதி அதன் இரு பக்கங்களிலும் இரட்டை அடைப்புகளை இடும்போது தொடை நிரற்படுத்தப்பட்டிருப்பதாகக் கருதப்படும்.

$$C = \{ 2 , 4 , 6 , 8 \}$$

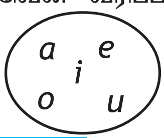
இங்கு தொடையை வகைகுறிக்கும் மூன்று முறைகளை நாம் இனங்கண்டோம்.

தொடையை வகைகுறித்தல்
- (i) விபரித்தல்
- (ii) பட்டியற்படுத்தல்
- (iii) வென் வரிப்படத்தில்

உதாரணம் 19.1

ஒரு குறித்த தொடை ஆங்கில நெடுங்கணக்கில் உள்ள உயிரெழுத்துகளின் தொடையாக விவரிக்கப்படுகின்றது. அத்தொடையை
(i) வென் வரிப்படமாக
(ii) பட்டியற்படுத்தலாக காட்டுக.

(i) வென் வரிப்படமாக



(ii) பட்டியற்படுத்தலாக

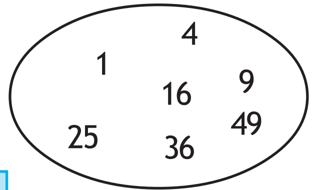
{*a* , e , i , o , u}

பயிற்சி 19.1

1. பின்வரும் தொகுதியினைப் பயிற்சிப் புத்தகத்தில் பிரதிசெய்து, அவற்றில் தொடையாக வகைகுறிக்கப்படத்தக்கவற்றுக்கு எதிரே √ எனவும் வகை குறிக்கப்பட முடியாதவற்றுக்கு எதிரே x எனவும் குறிப்பிடுக.
   (i) உயரமான பிள்ளைகள்
   (ii) தரம் 8 இல் 1.35 m இலும் கூடிய உயரமுள்ள பிள்ளைகள்
   (iii) தரம் 8 இல் இறுதித் தவணைப் பரீட்சையின்போது கணிதத்திற்கு 80% இலும் கூடிய புள்ளிகளைப் பெற்ற பிள்ளைகள்
   (iv) தரம் 8 இல் நுண்மதியுள்ள பிள்ளைகள்
   (v) எண்ணும் எண்கள்
   (vi) இலங்கையில் உள்ள பாடசாலைப் பிள்ளைகள்
   (vii) பாரம் குறைந்த பொருள்கள்
   (viii) ஆங்கில நெடுங்கணக்கிலுள்ள எழுத்துக்கள்

2. பின்வரும் தொடைகளின் மூலகங்களை பட்டியற்படுத்தி எழுதுக.
   (i) 10 இலும் குறைந்த ஒற்றை எண்களின் தொடை
   (ii) மகரகம என்னும் சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களின் தொடை
   (iii) 100 இலும் குறைந்த முதன்மை எண்களின் தொடை
   (iv) தரம் 8 இல் நீர் கற்கும் பாடங்களின் தொடை

3. வென் வரிப்படத்தில் காணப்படும் தொடையை ஒரு விபரித்தலாகவும் பட்டியல்படுத்தியும் காட்டுக.



19.2 தொடையின் மூலகங்கள்

A = {1 , 3 , 5 , 7 , 9} என்னும் தொடையைக் கருதுவோம். இத்தொடையின் மூலகங்கள் 1 , 3 , 5 , 7 , 9 ஆகும். இவை தொடை A யிற்குரியன என்பதைக் காட்டப் பயன்படுத்தப்படும் குறியீடு $\in$ ஆகும். இதற்கேற்ப 3 ஆனது தொடை A யின் மூலகமாகும். என்பது $3 \in A$ எனக் காட்டப்படும்.

$\in$ என்பது கிரேக்க நெடுங்கணக்கின் ஓர் எழுத்தாகும். இது “ எப்சைலன்” என வாசிக்கப்படும்.

மூலகமன்று என்பது $\notin$ இனால் காட்டப்படும்.

$4 \notin A$ என்பது 4 மூலகமன்று தொடை A யின் என்பதைக் குறிப்பிடுகின்றது.

பயிற்சி 19.2

01. பின்வரும் கூற்றுக்களை பயிற்சிக் கொப்பியில் எழுதி $\in$, $\notin$ என்பனவற்றில் பொருத்தமானதை இடைவெளியில் நிரப்பவும்.
   (i) 4 ....{எண்ணும் எண்கள்}
   (ii) 5 ....{இரட்டை எண்கள்}
   (iii) A ....{ஆங்கில அரிச்சுவடியிலுள்ள எழுத்துக்கள் }
   iv) முயல் ....{ மிருகங்கள்}
   (v) மயில் ....{பறவைகள்}
   (vi) உருளைக்கிழங்கு.... ..{பழங்கள்}

02. P = {2 , 3 , 5 , 7 } எனும் தொடை தொடர்பாக '$\in$' அல்லது '$\notin$' ஐப் பயன்படுத்தி இடைவெளி நிரப்பவும்.
   i) 2 .... p
   ii) 4 .... p
   iii) 5 .... p
   iv) 1 .... p

" இலவசப் பாடநூல் விநியோகத்திற்காக "

19.3 அகிலத் தொடைகள்

A = இரட்டை எண்களின் தொடை
B = ஒற்றை எண்களின் தொடை
C = முதன்மை எண்களின் தொடை
D = நிறைவர்க்க எண்களின் தொடை
எனக் கொள்வோம்.

A = { 2 , 4 , 6 , 8 , --- }
B = { 1 , 3 , 5 , 7 , --- }
C = { 2 , 3 , 5 , 7 , 11--- }
D = { 1 , 4 , 9 , 16 ,--- }

என அத்தொடைகளை பட்டியற்படுத்திக் காட்டலாம்.

இப்போது இத்தொடைகள் எல்லாவற்றினதும் மூலகங்கள் இடம்பெறும் ஒரு பெரிய தொடையில் எமது கவனத்தைச் செலுத்துவோம். நாம் எண்ணும் எண் தொடையைக் கருதுவோம். அதில் மேற்குறித்த தொடைகளின் எல்லா மூலகங்களும் இடம்பெறுகின்றமை தெளிவாகும்.

இவ்வாறு தொடைகளின் மூலகங்கள் அதிக எண்ணிக்கையில் இடம்பெறுமாறு உள்ள பெரிய தொடை அத்தொடைகளின் **அகிலத் தொடை** எனப்படும். இது ε என்னும் குறியீட்டினால் காட்டப்படும்.
இதற்கேற்ப மேலே விளக்கப்பட்ட தொடைகளின் அகிலத்தொடை எண்ணும் எண் தொடையாகும்.

ε = எண்ணும் எண்களின் தொடை

ε = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , --- }

உதாரணம் 19.2

தரம் 8 இல் உள்ள பிள்ளைகளின் தொடைக்குப் பொருத்தமான ஒரு அகிலத் தொடையைப் பெயரிடுக.
இதற்குப் பொருத்தமான சில அகிலத்தொடைகள் பின்வருவனவாகும்.

(i) { 6 தொடக்கம் 11 வரையுள்ள தரங்களில் உள்ள பிள்ளைகள்}
(ii) { தரம் 6 இற்கு மேற்பட்ட பிள்ளைகள்}
(iii) { தரம் 11 இற்கு கீழ்ப்பட்ட பிள்ளைகள்}

இத்தொடையை மேலும் விரிவுப்படுத்திப் பாடசாலையின் பெயரைக் குறிப்பிட்டு பாடசாலையில் உள்ள மாணவர் தொடை எனவும் அகிலத் தொடையை வகைகுறிக்கலாம்.

19.4 சூனியத் தொடை

யாதாயினும் ஒரு தொடையில் மூலகம் எதுவும் இல்லாவிட்டால், அத்தொடை சூனியத் தொடை எனப்படும். இது ϕ அல்லது { } என்னும் குறியீட்டுகளினால் குறிப்பிடப்படும்.

உதாரணம் 19.3

(i) P = { 0 இற்கும் 1 இற்குமிடையே உள்ள முழுவெண்கள்}
0 இற்கும் 1 இற்குமிடையே முழுவெண்கள் இருக்கின்றனவா? இல்லை.
ஆகவே, P ஆனது சூனியத் தொடையாகும்.
P = ϕ அல்லது P = { } எனக் காட்டலாம்.

(ii) சிறகுகள் உள்ள நான்கு கால்களையுடைய விலங்குத் தொடையை B எனக் காட்டினால், B = { சிறகுகள் உள்ள நான்கு கால் விலங்குகள்}
B ஆனது சூனியத் தொடையாகும்.

19.5 தொடையின் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை

P = {10 இலும் குறைந்த இரட்டை எண்கள்}
= {2, 4, 6, 8}
தொடை P யில் நான்கு மூலகங்கள் இடம்பெறுகின்றன.

தொடை P யின் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை n (P) இனால் குறிப்பிடப்படும்.
இங்கு
n (P) = 4

உதாரணம் 19.4

A = {பம்பரம் என்னும் சொல்லில் உள்ள எழுத்துகள்} எனின், n(A) யாது?

A = {ப, ம், ர}
$\therefore$ n (A) = 3

B = {சிறகுகள் உள்ள நான்குகால் விலங்குகள்}
n (B) = 0

பயிற்சி 19.3

1. பின்வரும் ஒவ்வொரு தொடைக்குமுரிய ஒவ்வொரு அகிலத் தொடையைப் பெயரிடுக.
   (i) { பாடசாலையில் தரம் 8 இல் உள்ள பிள்ளைகள்}
   (ii) { ஆங்கில நெடுங்கணக்கில் உள்ள உயிரெழுத்துகள்}
   (iii) { அலுமாரி, கதிரை, மேசை}
   (iv) { தொலைக்காட்சி, சலவைப் பொறி}
   (vi) { 10, 20, 30, 40, 50 }

2. பின்வரும் தொடைகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் உரிய மூலகங்களின் எண்ணிக்கை எழுதுக.
   (i) A = { 10 இலும் குறைந்த நேர் இரட்டை எண்கள்}
   (ii) P = { 20 இலும் குறைந்த ஒற்றை முதன்மை எண்கள்}
   (iii) Q = { "SAHARA" என்னும் சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்கள்}
   (iv) R = { 11 இற்கும் 20 இற்குமிடையே உள்ள நிறைவர்க்க எண்கள்}
   (vi) S = { ஒரு நாணயத்தை மேலே எறியும்போது கிடைக்கத்தக்க பேறுகள்}

3. (i) n(A) = 3
   (ii) n(B) = 1
   ஆகவுள்ள ஒரு தொடையைப் பெயரிடுக.

4. n(A) = 0 ஆகவுள்ள ஒரு தொடையைப் பெயரிடுக. அத்தொடைக்கு வழங்கும் சிறப்புப் பெயர் யாது?

5. { 0 } ஆனது சூனியத் தொடையா? உமது விடைக்குக் காரணங்களை எழுதுக.

சாராம்சம்

- தொடைக்குரிய மூலகங்களை இரட்டை அடைப்புச் சோடியினுள்ளே எழுதுதல் பட்டியற்படுத்தல் எனப்படும்.
- தொடைக்குரிய மூலகம் என்பது $\in$ இனாலும் தொடைக்குரிய மூலகமன்று என்பது $\notin$ இனாலும் குறிப்பிடப்படும்.
- P = {a, b, c, d} ஆக இருக்கும்போது $a \in P$, $x \notin P$ ஆகும்.
- P = {a, b, c, d} இல் 4 மூலகங்கள் இடம்பெறுதலை n(p) = 4 எனக் காட்டலாம்.
- பல தொடைகளின் மூலகங்கள் இடம்பெறும் பெரிய தொடை அகிலத்தொடை எனப்படும்.
- அகிலத்தொடை ξ இனால் குறிப்பிடப்படும்.
- மூலகங்கள் இடம்பெறாத தொடை சூனியத் தொடை எனப்படும். அது ϕ அல்லது { } களினால் குறிப்பிடப்படும்.