ගණිතය

11 ශ්‍රේණිය

II කොටස

අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

පළමුවන මුද්‍රණය - 2015
දෙවන මුද්‍රණය - 2016
තුන්වන මුද්‍රණය - 2017
හතරවන මුද්‍රණය - 2018
පස්වන මුද්‍රණය - 2019

ISBN 978-955-25-0410-5

අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව විසින්
පානළුව, පාදුක්ක පිහිටි රජයේ මුද්‍රණ නීතිගත සංස්ථාවේ
මුද්‍රණය කරවා ප්‍රකාශයට පත්කරන ලදි.

ශ්‍රී ලංකා ජාතික ගීය

ශ්‍රී ලංකා මාතා
අප ශ්‍රී ලංකා, නමෝ නමෝ නමෝ නමෝ මාතා
සුන්දර සිරිබරිනී, සුරැඳි අති සෝබමාන ලංකා
ධාන්‍ය ධනය නෙක මල් පලතුරු පිරි ජය භූමිය රම්‍යා
අපහට සැප සිරි සෙත සදනා ජීවනයේ මාතා
පිළිගනු මැන අප භක්ති පූජා
නමෝ නමෝ මාතා
අප ශ්‍රී ලංකා, නමෝ නමෝ නමෝ නමෝ මාතා
ඔබ වේ අප විද්‍යා
ඔබ ම ය අප සත්‍යා
ඔබ වේ අප ශක්ති
අප හද තුළ භක්ති
ඔබ අප ආලෝකේ
අපගේ අනුප්‍රාණේ
ඔබ අප ජීවන වේ
අප මුක්තිය ඔබ වේ
නව ජීවන දෙමිනේ නිතින අප පුබුදු කරන් මාතා
ඥාන වීර්ය වඩවමින රැගෙන යනු මැන ජය භූමි කරා
එක මවකගෙ දරු කැල බැවිනා
යමු යමු වී නොපමා
ප්‍රේම වඩා සැම භේද දුරැර ද නමෝ නමෝ මාතා
අප ශ්‍රී ලංකා, නමෝ නමෝ නමෝ නමෝ මාතා

අපි වෙමු එක මවකගෙ දරුවෝ
එක නිවසෙහි වෙසෙනා
එක පාටැති එක රුධිරය වේ
අප කය තුළ දුවනා

එබැවිනි අපි වෙමු සොයුරු සොයුරියෝ
එක ලෙස එහි වැඩෙනා
ජීවත් වන අප මෙම නිවසේ
සොඳින සිටිය යුතු වේ

සැමට ම මෙත් කරුණා ගුණෙනී
වෙළී සමගි දමිනී
රන් මිණි මුතු නො ව එය ම ය සැපතා
කිසි කල නොම දිරනා

ආනන්ද සමරකෝන්

"අලුත් වෙමින්, වෙනස් වෙමින්, නිවැරැදි දැනුමෙන්
රටට වගෙ ම මුළු ලොවට ම වෙන්න නැණ පහන්"

ගරු අධ්‍යාපන අමාත්‍යතුමාගේ පණිවුඩය

ගෙවී ගිය දශක දෙකකට ආසන්න කාලය ලෝක ඉතිහාසය තුළ සුවිශේෂී වූ තාක්ෂණික වෙනස්කම් රැසක් සිදුවූ කාලයකි. තොරතුරු තාක්ෂණය, සන්නිවේදනය ප්‍රමුඛ කරගත් සෙසු ක්ෂේත්‍රවල ශීඝ්‍ර දියුණුවත් සමඟ වත්මන් සිසු දරු දැරියන් හමුවේ නව අභියෝග රැසක් නිර්මාණය වී තිබේ. අද සමාජයේ පවතින රැකියාවල ස්වභාවය නුදුරු අනාගතයේ දී සුවිශේෂී වෙනස්කම් රැසකට ලක් වනු ඇත. එවන් වටපිටාවක් තුළ නව තාක්ෂණික දැනුම සහ බුද්ධිය කේන්ද්‍ර කරගත් සමාජයක වෙනස් ආකාරයේ රැකියා අවස්ථා ද ලක්ෂ ගණනින් නිර්මාණය වනු ඇත. ඒ අනාගත අභියෝග ජයගැනීම වෙනුවෙන්, ඔබ සවිබල ගැන්වීම අධ්‍යාපන අමාත්‍යවරයා ලෙස මගේත්, අප රජයේත් ප්‍රමුඛ අරමුණයි.

නිදහස් අධ්‍යාපනයේ මාහැඟි ප්‍රතිලාභයක් ලෙස නොමිලේ ඔබ අතට පත් වන මෙම පොත මනාව පරිශීලනය කිරීමත්, ඉන් අවශ්‍ය දැනුම උකහා ගැනීමත් ඔබේ ඒකායන අරමුණ විය යුතු ය. එමෙන් ම ඔබේ මවුපියන් ඇතුළු වැඩිහිටියන්ගේ ශ්‍රමයේ සහ කැපකිරීමේ ප්‍රතිඵලයක් ලෙස රජය විසින් නොමිලේ පාසල් පෙළපොත් ඔබ අතට පත් කරනු ලබන බව ද ඔබ වටහා ගත යුතු ය.

ලෝකය වේගයෙන් වෙනස් වන වටපිටාවක, නව ප්‍රවණතාවලට ගැළපෙන අයුරින් නව විෂය මාලා සකස් කිරීමටත්, අධ්‍යාපන පද්ධතිය තුළ තීරණාත්මක වෙනස්කම් සිදු කිරීම සඳහාත් රජයක් ලෙස අප කටයුතු කරන්නේ රටක අනාගතය අධ්‍යාපනය මතින් සිදු වන බව අප හොඳින් ම අවබෝධ කරගෙන සිටින බැවිනි. නිදහස් අධ්‍යාපනයේ උපරිම ප්‍රතිඵල භුක්ති විඳිමින්, රටට පමණක් නොව ලොවට ම වැඩදායී ශ්‍රී ලාංකික පුරවැසියකු ලෙස නැඟී සිටින්නට ඔබ ද අදිටන් කරගත යුතු වන්නේ එබැවිනි. ඒ සඳහා මේ පොත පරිශීලනය කිරීමෙන් ඔබ ලබන දැනුම ද ඉවහල් වනු ඇති බව මගේ විශ්වාසයයි.

රජය ඔබේ අධ්‍යාපනය වෙනුවෙන් වියදම් කරන අතිවිශාල ධනස්කන්ධයට වටිනාකමක් එක් කිරීම ද ඔබේ යුතුකමක් වන අතර, පාසල් අධ්‍යාපනය හරහා ඔබ ලබා ගන්නා දැනුම හා කුසලතා ඔබේ අනාගතය තීරණය කරන බව ද ඔබ හොඳින් අවබෝධ කර ගත යුතු ය. ඔබ සමාජයේ කුමන තරාතිරමක සිටිය ද සියලු බාධා බිඳ දමමින් සමාජයේ ඉහළ ම ස්තරයකට ගමන් කිරීමේ හැකියාව අධ්‍යාපනය හරහා ඔබට හිමි වන බව ද ඔබ හොඳින් අවධාරණය කර ගත යුතු ය.

එබැවින් නිදහස් අධ්‍යාපනයේ උපරිම ප්‍රතිඵල ලබා, ගෞරවනීය පුරවැසියකු ලෙස හෙට ලොව දිනන්නටත් දේශ දේශාන්තරවල පවා ශ්‍රී ලාංකේය නාමය බබළවන්නටත් ඔබට හැකි වේවා! යි අධ්‍යාපන අමාත්‍යවරයා ලෙස මම ශුභ ප්‍රාර්ථනය කරමි.

අකිල විරාජ් කාරියවසම්
අධ්‍යාපන අමාත්‍ය

පෙරවදන

ලෝකයේ ආර්ථික, සමාජීය, සංස්කෘතික හා තාක්ෂණික සංවර්ධනයත් සමඟ අධ්‍යාපන අරමුණු වඩා සංකීර්ණ ස්වරූපයක් ගනී. මිනිස් අත්දැකීම්, තාක්ෂණික වෙනස්වීම්, පර්යේෂණ සහ නව දර්ශක ඇසුරෙන් ඉගෙනීමේ හා ඉගැන්වීමේ ක්‍රියාවලිය ද නවීකරණය වෙමින් පවතියි. එහිදී ශිෂ්‍ය අවශ්‍යතාවලට ගැළපෙන ලෙස ඉගෙනුම් අත්දැකීම් සංවිධානය කරමින් ඉගැන්වීම් ක්‍රියාවලිය පවත්වාගෙන යාම සඳහා විෂය නිර්දේශයේ දැක්වෙන අරමුණුවලට අනුකූලව, විෂයානුබද්ධ කරුණු ඇතුළත්ව පෙළපොත සම්පාදනය වීම අවශ්‍ය ය. පෙළපොත යනු ශිෂ්‍යයාට ඉගෙනීමේ උපකරණයක් පමණක් නොවේ. එය ඉගෙනුම් අත්දැකීම් ලබා ගැනීමටත් නැණ ගුණ වර්ධනයටත් චර්යාමය හා ආකල්පමය වර්ධනයක් සහිතව ඉහළ අධ්‍යාපනයක් ලැබීමටත් ඉවහල් වන ආශීර්වාදයකි.

නිදහස් අධ්‍යාපන සංකල්පය යථාර්ථයක් බවට පත්කරමින් 1 ශ්‍රේණියේ සිට 11 ශ්‍රේණිය දක්වා සියලු ම පෙළපොත් රජයෙන් ඔබට තිළිණ කෙරේ. එම ග්‍රන්ථවලින් උපරිම ඵල ලබන අතර ම ඒවා රැක ගැනීමේ වගකීම ද ඔබ සතු බව සිහිපත් කරමි. පූර්ණ පෞරුෂයකින් හෙබි, රටට වැඩදායී යහපත් පුරවැසියකු වීමේ පරිචය ලබා ගැනීමට මෙම පෙළපොත ඔබට උපකාරී වෙතැයි මම අපේක්ෂා කරමි.

මෙම පෙළපොත් සම්පාදනයට දායක වූ ලේඛක, සංස්කාරක හා ඇගයුම් මණ්ඩල සාමාජික මහත්ම මහත්මීන්ටත් අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුවේ කාර්ය මණ්ඩලයටත් මාගේ ස්තුතිය පළ කර සිටිමි.

ඩබ්ලිව්. එම්. ජයන්ත වික්‍රමනායක,
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන කොමසාරිස් ජනරාල්,
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව,
ඉසුරුපාය,
බත්තරමුල්ල.
2019.04.10

නියාමනය හා අධීක්ෂණය

ඩබ්ලිව්.එම්. ජයන්ත වික්‍රමනායක මයා - අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන කොමසාරිස් ජනරාල්
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

මෙහෙයවීම

ඩබ්ලිව්. ඒ. නිර්මලා පියසීලි මිය - අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන කොමසාරිස් (සංවර්ධන)
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

සම්බන්ධීකරණය

තනුජා මෛත්‍රී විතාරණ මිය - සහකාර කොමසාරිස්
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

චන්දිමා කුමාරි ද සොයිසා මිය - සහකාර කොමසාරිස් (2019 නැවත මුද්‍රණය)
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

සංස්කාරක මණ්ඩලය

ආචාර්ය ඩී.කේ. මල්ලව ආරච්චි මයා - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය
ආචාර්ය රොමේන් ජයවර්ධන මිය - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කොළඹ විශ්වවිද්‍යාලය
ආචාර්ය ශ්‍රී ධරන් මයා - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කොළඹ විශ්වවිද්‍යාලය
බී.ඩී. චිත්තානන්ද බියන්විල මයා - අධ්‍යක්ෂ, ගණිතය අංශය, අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය
ජී.පී.එච්. ජගත් කුමාර මයා - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
තනුජා මෛත්‍රී විතාරණ මිය - සහකාර කොමසාරිස්
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

ලේඛක මණ්ඩලය

එච්.එම්.ඒ. ජයසේන මයා - ගුරු උපදේශක, (විශ්‍රාමික)
වයි.වී.ආර්. විතාරම මයා - ගුරු උපදේශක, කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, දෙහිඕවිට
ඩබ්.එම්.ඩබ්.සී වලිසිංහ මයා - ගුරු උපදේශක, කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, කෑගල්ල
අජිත් රණසිංහ මයා - ගුරු උපදේශක, කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, හෝමාගම
අනුර ඩී. වීරසිංහ මයා - ගුරු උපදේශක, (පිරිවෙන්), මාතර දිස්ත්‍රික්කය
ඩබ්ලිව්.එම්.ඩී. ලාල් විජේකාන්ත මයා - ගුරු සේවය, ශාන්ත තෝමස් විද්‍යාලය, ගල්කිස්ස
ආචාර්ය රෝචනා මීගස්කුඹුර මිය - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, පේරාදෙණිය විශ්වවිද්‍යාලය
ආචාර්ය ජේ. රත්නායක මයා - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කොළඹ විශ්වවිද්‍යාලය
ආචාර්ය ජයන්ත සේනාධීර මයා - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
ආචාර්ය ආර්. ටී. සමරතුංග මයා - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කොළඹ විශ්වවිද්‍යාලය
අයි.එන්. වාගීෂමූර්ති මයා - අධ්‍යක්ෂ, (විශ්‍රමික)
ආර්.එස්.ඊ. පුෂ්පරාජන් මයා - සහකාර අධ්‍යක්ෂ,කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, පුත්තලම
වී. මුරලි මයා - ගුරු අධ්‍යාපනඥ සේවය, කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය,වවුනියාව

භාෂා සංස්කරණය

ජයත් පියදසුන් මයා - මාධ්‍යවේදී, කර්තෘ මණ්ඩලය - සිළුමිණ

සෝදුපත් කියවීම

ඩී.යූ. ශ්‍රීකාන්ත එදිරිසිංහ මයා - ගුරු සේවය, ගොඩගම සුභාරතී මහාමාත්‍ය මහා විද්‍යාලය

රූපසටහන් පිටකවර නිර්මාණය පරිගණක අක්ෂර සංයෝජනය

ආර්.ඩී. තිළිණි සෙව්වන්දි මෙය මිය - පරිගණක සහායක, අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව
බී.ටී. චතුරාණි පෙරේරා - පරිගණක සහායක, අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

සම්පාදක මණ්ඩල සටහන

2015 වර්ෂයේ සිට ක්‍රියාත්මක වන නව විෂය නිර්දේශයට අනුකූලව මෙම පෙළපොත රචනා කර ඇත.

පෙළපොත සම්පාදනය කෙරෙන්නේ සිසුන් වෙනුවෙනි. එබැවින්, ඔබට තනිව කියවා වුව ද තේරුම් ගත හැකි පරිදි සරල ව සහ විස්තරාත්මක ව එය රචනා කිරීමට උත්සාහ ගත්තෙමු.

විෂය සංකල්ප ආකර්ශනීය අන්දමින් ඉදිරිපත් කිරීම සහ තහවුරු කිරීම සඳහා, විස්තර කිරීම්, ක්‍රියාකාරකම්, සහ නිදසුන් වැනි විවිධ ක්‍රම අනුගමනය කළෙමු. තව ද, අභ්‍යාස කිරීමේ රුචිකත්වය වර්ධනය වන පරිදි ඒවා සරල සිට සංකීර්ණ දක්වා අනුපිළිවෙළින් පෙළ ගස්වා තිබේ.

ගණිත විෂයයට අදාළ සංකල්ප දැක්වෙන පද, රාජ්‍ය භාෂා දෙපාර්තමේන්තුව සම්පාදනය කරන ගණිතය පාරිභාෂික පදමාලාවට අනුකූලව භාවිත කළෙමු.

විෂය නිර්දේශයේ 11 ශ්‍රේණියට අදාළ විෂය කොටස් ඉගෙන ගැනීමට මින් පෙර ශ්‍රේණිවල දී ඔබ උගත් යම් යම් විෂය කරුණු අවශ්‍ය වේ. එබැවින් එම පෙර දැනුම සිහි කිරීම පිණිස පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාස සෑම පරිච්ඡේදයකම ආරම්භයේ දැක්වෙයි. ඒවා මගින් 11 ශ්‍රේණියට අදාළ විෂය කොටස් සඳහා ඔබව සූදානම් කෙරෙනු ඇත.

ඊට අමතරව 10 ශ්‍රේණියේහි පෙළපොත සිසුන් ළඟ තිබෙන බැවින් පෙර දැනුම අවශ්‍ය වන විටදී එය ද භාවිතයට ගනු ඇතැයි අපි බලාපොරොත්තු වෙමු.

පන්තියේ දී ගුරුවරයා විසින් ඉගැන්වීමට පෙර, ඔබ මේ පරිච්ඡේද කියවීමෙන් සහ ඒ ඒ පරිච්ඡේදයේ එන පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාස කිරීමෙන්, මේ පොත භාවිතයෙන් උපරිම ඵල ලැබිය හැකි ය.

ගණිත අධ්‍යාපනය ප්‍රීතිමත් සහ ඵලදායක වන්නැයි අපි ප්‍රාර්ථනා කරමු.

සම්පාදක මණ්ඩලය

පටුන

පිටුව

09 ප්‍රතිශත

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- හීන වන ශේෂ ක්‍රමයට ණය වාරික ගණනය කිරීමට
- හීන වන ශේෂ ක්‍රමයට ණය වාරිකය දී ඇති විට පොලී අනුපාතිකය ගණනය කිරීමට
- වැල් පොලිය සම්බන්ධ ගැටලු විසඳීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

ප්‍රතිශත සම්බන්ධයෙන් ඔබ මෙතෙක් උගත් විෂය කරුණු නැවත මතක් කර ගැනීම සඳහා පහත දී ඇති අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. ප්‍රතිශත ගණනය කරන්න.

a. රුපියල් 800න් 12% **b.** කිලෝමීටර 1 න් 8%

c. ග්‍රෑම් 1 200න් 2.5% **d.** ලීටර 2.5 න් 25%

2. රුපියල් 500ට මිල දී ගත් අත් ඔරලෝසුවක් රුපියල් 600ට විකුණූ වෙළෙන්දකුට ලැබෙන ලාභ ප්‍රතිශතය ගණනය කරන්න.

3. රුපියල් 8 000ක් 6%ක වාර්ෂික සුළු පොලී අනුපාතිකයට ණයට ගත් පුද්ගලයකු වසරකට ගෙවිය යුතු පොලිය ගණනය කරන්න.

4. රුපියල් 5 000ක් 10%ක වාර්ෂික සුළු පොලී අනුපාතිකයක් යටතේ ණයට ගත් පුද්ගලයකුට වසර 2කට පසු ගෙවීමට සිදු වන මුළු පොලිය ගණනය කරන්න.

5. 2%ක මාසික සුළු පොලී ප්‍රතිශතයක් යටතේ රුපියල් 10 000ක් ණයට ගත් සුනිමල්ට මාස 3කට පසු ණයෙන් නිදහස් වීමට ගෙවීමට සිදු වන මුළු මුදල කොපමණ ද?

හැඳින්වීම

අප විසින් එදිනෙදා ජීවිතයේ දී කරනු ලබන වියදම් පුනරාවර්තන වියදම් සහ ප්‍රාග්ධන වියදම් වශයෙන් කොටස් දෙකකට වෙන් කළ හැකි ය. නැවත නැවත දැරීමට සිදු වන වියදම් පුනරාවර්තන වියදම් ලෙස හැඳින්වේ. නිදසුන් ලෙස, ආහාරපාන, ඇඳුම්පැලඳුම්, බෙත්හේත් ආදිය මිල දී ගැනීම හා විදුලි බිල්පත් ආදිය ගෙවීම සඳහා කරනු ලබන වියදම් පුනරාවර්තන වියදම් ලෙස දැක්විය හැකි ය. නැවත නැවත දැරීමට සිදු නොවන වියදම් ප්‍රාග්ධන වියදම් ලෙස හැඳින්වේ. නිදසුන් ලෙස, ඉඩම්, නිවාස, වාහන, යන්ත්‍රසූත්‍ර හෝ ගෘහභාණ්ඩ මිලට ගැනීම සඳහා කරනු ලබන වියදම් ප්‍රාග්ධන වියදම් ලෙස දැක්විය හැකි ය. එවැනි වියදම් ප්‍රමාණාත්මක ව විශාල වන බැවින් ඒ සඳහා අවශ්‍ය මුදල්, මූල්‍ය ආයතනයකින් හෝ තමා සේවය කරන සේවා ස්ථානයෙන් ණය මුදලක් ලෙස ලබා ගැනීම බොහෝ විට සිදු වේ.

එසේ ලබා ගන්නා ණය මුදලක් එක වර ආපසු ගෙවීම සාමාන්‍යයෙන් සිදු නොකෙරෙන අතර, දීර්ඝ කාලයක් තුළ මාසික ව කොටස් වශයෙන් ගෙවීම සිදු කරනු ලැබේ. තව ද එවැනි ණය මුදලක් ලබා ගත් විට ණය මුදලට අමතර ව පොලියක් ද ගෙවීමට ද සිදු වේ. මාසික ව ගෙවීමට සිදු වන පොලියේ හා ණය කොටසේ එකතුව ණය වාරිකයක් ලෙස හැඳින්වේ.

නමුත් ඇතැම් ආයතන තම ආයතනය මගින් නිෂ්පාදනය කෙරෙන හෝ ගෙන්වා බෙදාහැරෙන භාණ්ඩවල අලෙවිය වැඩි කර ගැනීම සඳහා පොලී රහිත ව ණය මුදල පමණක් වාරික ලෙස ගෙවීමට හැකි වන සේ භාණ්ඩ අලෙවි කරන අවස්ථා ද දැකිය හැකි ය.

නිදසුන 1

ගෘහ භාණ්ඩ නිෂ්පාදන සමාගමක් මගින් නිෂ්පාදනය කෙරෙන රුපියල් 30 000ක් වටිනා ලී අල්මාරියක් පොලී රහිත මාසික වාරික 12කින් ගෙවීමේ කොන්දේසිය මත අලෙවි කරනු ලැබේ. මාසික ව ගෙවිය යුතු ණය වාරිකය කොපමණ ද?

$$\text{ණය වාරිකයක වටිනාකම} = \text{රු } \frac{30\,000}{12}$$

$$= \underline{\underline{\text{රු } 2\,500}}$$

නිදසුන 2

රාජ්‍ය ආයතනයක සේවය කරන පුද්ගලයකුට උත්සව අත්තිකාරම් ලෙස රුපියල් 5 000ක මුදලක් ලබාදෙන අතර එම මුදල පොලී රහිත ව මාසික වාරික 10ක් තුළ ගෙවා නිම කළ යුතු ය. එම මුදල මාසික ව වැටුපෙන් අඩු කරනු ලබයි නම් මාසික ව වැටුපෙන් අඩු වන මුදල කොපමණ ද?

$$\text{මාසික ව වැටුපෙන් අඩු වන මුදල} = \text{රු } \frac{5\,000}{10}$$

$$= \underline{\underline{\text{රු } 500}}$$

9.1 හීන වන ශේෂ ක්‍රමය යටතේ පොලිය ගණනය කිරීම

පොලිය අය කර ගන්නා අවස්ථාවල දී පොලිය ගණනය කෙරෙන ක්‍රම විවිධ වේ. හීන වන ශේෂ ක්‍රමය යටතේ පොලිය ගණනය කිරීම වඩාත් සුලභ ක්‍රමයකි. ඒ පිළිබඳ ව විමසා බලමු.

මාසික වාරික ලෙස ආපසු ගෙවීම සඳහා කිසියම් ආයතනයකින් ණය මුදලක් ගත් විට හෝ භාණ්ඩයක වටිනාකමින් කොටසක් පමණක් මුලින් ගෙවා ඉතිරි මුදල මාසික වාරික මගින් ආපසු ගෙවීමේ පොරොන්දුව පිට භාණ්ඩ මිල දී ගෙන ඇති විට, ණය මුදලට අමතර ව පොලියක් ද ගෙවීමට බොහෝ විට සිදු වේ.

මෙම ක්‍රමය යටතේ සෑම මාසයක් තුළ ම ණය මුදලින් කොටසක් ගෙවනු ලබයි. පොලිය ගණනය කරනු ලබන්නේ ගෙවීමට ඇති ණය මුදල සඳහා ය. එබැවින් ගෙවීමට ඇති ණය

මුදල මාස් පතා අඩු වන බැවින් පොලිය ද මාස් පතා ගණනය කරනු ලැබේ. එම නිසා මෙම ක්‍රමයට පොලිය ගණනය කිරීම, හීන වන ශේෂ ක්‍රමය යටතේ පොලිය ගණනය කිරීම ලෙස හැඳින්වේ. එසේ ගණනය කිරීමෙන් පසු, සෑම මාසයකම එකම මුදලක් වාරිකය ලෙස ගෙවිය යුතු වන පරිදි මාසික වාරිකයක අගය සොයනු ලැබේ.

හීන වන ශේෂ ක්‍රමය යටතේ පොලිය ගණනය කෙරෙන ආකාරය හා මාසික වාරිකයක අගය සොයන ආකාරය අවබෝධ කර ගැනීම සඳහා පහත නිදසුන් අධ්‍යයනය කරන්න.

නිදසුන 1

වික්‍රමසිංහ මහතා 24%ක වාර්ෂික පොලියක් අය කෙරෙන බැංකුවකින් ව්‍යාපාරික ණයක් ලෙස රුපියල් 30 000ක මුදලක් ගෙන ඇත. එම ණය මුදල සමාන මාසික වාරික 6කින් ගෙවා නිම කළ යුතු අතර, පොලිය අය කරනු ලබන්නේ හීන වන ශේෂ ක්‍රමයට නම් ඔහු විසින් ගෙවිය යුතු මාසික වාරිකයක් සොයන්න.

ලබාගෙන ඇති ණය මුදල = රු 30 000

පොලිය රහිත ණය වාරිකයක අගය $= \text{රු } \dfrac{30\,000}{6}$

$= \text{රු } 5\,000$

මෙම ක්‍රමයට සෑම මාසයක දී ම ණය ශේෂය රුපියල් 5 000 බැගින් අඩු වන අතර, පොලිය අය කරනු ලබන්නේ ඉතිරි වන ණය ශේෂය සඳහා ය.

අය කෙරෙන වාර්ෂික පොලී අනුපාතිකය = 24%

ඒ අනුව මාසික පොලී අනුපාතිකය = 2%

පළමු මාසයට පොලිය $= \text{රු } 30\,000 \times \dfrac{2}{100}$

$= \text{රු } 600$

දෙවන මාසයට පොලිය $= \text{රු } 25\,000 \times \dfrac{2}{100}$

$= \text{රු } 500$

තුන්වන මාසයට පොලිය $= \text{රු } 20\,000 \times \dfrac{2}{100}$

$= \text{රු } 400$

හතරවන මාසයට පොලිය $= \text{රු } 15\,000 \times \dfrac{2}{100}$

$= \text{රු } 300$

පස්වන මාසයට පොලිය $= \text{රු } 10\,000 \times \dfrac{2}{100}$

$= \text{රු } 200$

හයවන මාසයට පොලිය $= \text{රු } 5\,000 \times \dfrac{2}{100}$

$= \text{රු } 100$

ඒ අනුව ගෙවිය යුතු මුළු පොලිය $= $ රු $600 + 500 + 400 + 300 + 200 + 100$

$= $ රු $2\ 100$

මාස 6 අවසානයේ ගෙවිය යුතු මුදල = පොලිය රහිත ණය මුදල + පොලිය

එවිට ගෙවිය යුතු මුළු මුදල $= $ රු $30\ 000 + 2\ 100$

$= $ රු $32\ 100$

$\therefore$ මාසික වාරිකයක අගය $= $ රු $32\ 100 \div 6$

$= $ රු $\underline{\underline{5\ 350}}$

ඉහත දක්වා ඇති ක්‍රමයට පොලිය ගණනය කිරීම සඳහා විශාල කාලයක් වැය වේ. එම නිසා පහසුවෙන් පොලිය ගණනය කිරීම සඳහා පහත දැක්වෙන ක්‍රමවේදය සලකා බලමු.

මසක දී ගෙවිය යුතු ණය කොටසක් සඳහා පොලිය $= $ රු $5\ 000 \times \frac{2}{100}$

$= $ රු 100

ඒ අනුව,

ගෙවිය යුතු මුළු පොලිය $= $ රු $100 \times 6 + 100 \times 5 + 100 \times 4 + 100 \times 3 + 100 \times 2 + 100 \times 1$

$= $ රු $100\ (6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)$

$= $ රු 100×21

$= $ රු $2\ 100$

මෙහි 21 යනු මාස 6 තුළ ම ගෙවීමට ඇති ණය කොටස් ගණනේ (රුපියල් 5 000 කොටස් ගණනේ) එකතුව වේ. එය **මාස ඒකක ගණන** ලෙස හඳුන්වනු ලැබේ. ඒ අනුව,

මාස ඒකක ගණන $= 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$

එම අගයන් සමාන්තර ශ්‍රේඪියක අනුයාත පද ලෙස සැලකූ විට ඒවායේ ඓක්‍යය $\frac{n}{2}(a + l)$ සූත්‍රය මගින් ද ගණනය කළ හැකි ය.

එවිට, මාස ඒකක ගණන $= \frac{6}{2}(6 + 1)$

$= 3 \times 7$

$= 21$

එනම්, මාස ඒකක ගණන $= \frac{\text{වාරික ගණන}}{2}$ (වාරික ගණන $+ 1$) මගින් ලබා ගත හැකි ය.
ඒ අනුව,

ණය ගෙවිය යුතු මාසික වාරික ගණන n නම්

මාස ඒකක ගණන $= \frac{n}{2}(n + 1)$ වේ.

නිදසුන 2

අත්පිට මුදලට රුපියල් 25 000ක් වූ රූපවාහිනී යන්ත්‍රයක් මුලින් රුපියල් 7 000ක් ගෙවා ඉතිරිය වසරක් තුළ සමාන මාසික වාරික මගින් ගෙවීමට ලබාගත හැකි ය. ණය සඳහා හීන වන ශේෂ ක්‍රමය යටතේ 18%ක වාර්ෂික පොලියක් අය කරනු ලබයි නම් මාසික වාරිකයක් ගණනය කරන්න.

රූපවාහිනී යන්ත්‍රයේ වටිනාකම = රු 25 000
පළමු ව ගෙවිය යුතු මුදල = රු 7 000
$\therefore$ ගෙවීමට ඇති ඉතිරි ණය මුදල = රු 25 000 – 7 000
= රු 18 000
ණය ගෙවිය යුතු කාලය = මාස 12
$\therefore$ මසක දී ගෙවිය යුතු ණය කොටස = රු 18 000 $\div$ 12
= රු 1 500
මාස ඒකකයකට පොලිය = රු 1 500 $\times \frac{18}{100} \times \frac{1}{12}$
= රු 22.50
පොලිය ගෙවිය යුතු මාස ඒකක ගණන = $\frac{12}{2}(12+1)$
$= 6 \times 13$
$= 78$
$\therefore$ ගෙවිය යුතු මුළු පොලිය = රු 22.50 $\times$ 78
= රු 1 755
$\therefore$ ගෙවිය යුතු මුළු මුදල = රු 18 000 + 1 755
= රු 19 755
$\therefore$ මාසික වාරිකයක වටිනාකම = රු 19 755 $\div$ 12
= රු 1 646.25

නිදසුන 3

වෙළෙඳසලක දක්නට තිබූ දැන්වීමකින් උපුටාගත් කොටසක් පහත දැක්වේ.

රුපියල් 30 000ක් වටිනා රෙදි සෝදන යන්ත්‍රයක් මුලින් රුපියල් 5 000ක් ගෙවා ඉතිරිය රුපියල් 2 720 බැගින් වූ සමාන මාසික වාරික 10කින් ගෙවීමට ලබාගන්න.

ණය සඳහා පොලිය ගණනය කර ඇත්තේ හීන වන ශේෂ ක්‍රමයට නම්, අය කෙරෙන වාර්ෂික පොලී අනුපාතිකය ගණනය කරන්න.

රෙදි සෝදන යන්ත්‍රයේ වටිනාකම = රු 30 000
පළමු ව ගෙවිය යුතු මුදල = රු 5 000
ගෙවීමට ඇති ඉතිරි ණය මුදල = රු 30 000 – 5 000
= රු 25 000

$$
\begin{aligned}
\text{මාසික ව ගෙවිය යුතු ණය කොටස} &= \text{රු } 25\,000 \div 10 \\
&= \text{රු } 2\,500 \\
\text{වාරික ලෙස ගෙවිය යුතු මුළු මුදල} &= \text{රු } 2\,720 \times 10 \\
&= \text{රු } 27\,200 \\
\text{ගෙවිය යුතු මුළු පොලිය} &= \text{රු } 27\,200 - 25\,000 \\
&= \text{රු } 2\,200 \\
\text{මාස ඒකක ගණන} &= \frac{10}{2}(10+1) \\
&= 55 \\
\text{මාස ඒකකයකට පොලිය} &= \text{රු } 2\,200 \div 55 \\
&= \text{රු } 40 \\
\text{අය කෙරෙන වාර්ෂික පොලී අනුපාතිකය} &= \frac{40}{2\,500} \times 100\% \times 12 \\
&= \underline{\underline{19.2\%}}
\end{aligned}
$$

9.1 අභ්‍යාසය

1. සඳමිණි 12%ක වාර්ෂික පොලියක් අය කරන බැංකුවකින් රුපියල් 50 000ක ණය මුදලක් ගත්තා ය. එම ණය මුදල සමාන මාසික වාරික 10කින් ගෙවා නිම කළ යුතු ය.

(i) මසක දී ගෙවන ණය මුදලේ කොටස සොයන්න.
(ii) ණය කොටසක් සඳහා මසකට ගෙවිය යුතු පොලිය කොපමණ ද?
(iii) පොලී ගෙවිය යුතු මාස ඒකක ගණන කීය ද?
(iv) හීන වන ශේෂ ක්‍රමය යටතේ ණය මුදල සඳහා ගෙවිය යුතු මුළු පොලිය සොයන්න.
(v) මාසික වාරිකයක අගය සොයන්න.

2. රජයේ සේවකයකුට තම මාසික වැටුප මෙන් දස ගුණයක මුදලක් 3%ක වාර්ෂික පොලී අනුපාතිකයක් යටතේ ණය මුදලක් ලෙස ලබාගත හැකි අතර, එම ණය මුදල සමාන මාසික වාරික ලෙස වසර 5ක් තුළ ගෙවා නිම කළ යුතු ය. නිමල්ගේ මාසික වැටුප රුපියල් 30 000ක් වේ.

(i) නිමල්ට ලබා ගත හැකි ණය මුදල කොපමණ ද?
(ii) ණය මුදල ගෙවීමට දී ඇති කාලය මාස කීය ද?
(iii) ණය සඳහා පොලිය අය කරනු ලබන්නේ හීන වන ශේෂ ක්‍රමයට නම් ගෙවිය යුතු මුළු පොලිය ගණනය කරන්න.
(iv) හීන වන ශේෂ ක්‍රමය යටතේ ණය පියවීම සඳහා ගෙවිය යුතු මුළු මුදල සොයන්න.
(v) මාසික වාරිකයක අගය සොයන්න.

3. රුපියල් 35 000ක් වටිනා කෑම මේසයක් මුලින් රුපියල් 5 000ක් ගෙවා ඉතිරිය සමාන මාසික වාරික 15කින් ගෙවා නිම කිරීමට ලබා ගත හැකි ය. ණය සඳහා 18%ක වාර්ෂික පොලියක් අය කෙරෙන අතර, පොලිය ගණනය කරනු ලබන්නේ හීන වන ශේෂ ක්‍රමයට වේ. ගෙවිය යුතු ණය වාරිකයක අගය සොයන්න.

4. අත්පිට මුදලට රුපියල් 150 000ක් වූ යතුරු පැදියක් මුලින් රුපියල් 30 000ක් ගෙවා ඉතිරිය 24%ක වාර්ෂික පොලියක් සමග සමාන මාසික වාරිකවලින් වසර 2 කදී ගෙවා නිම කළ හැකි ය. පොලිය ගණනය කරනු ලබන්නේ හීන වන ශේෂ ක්‍රමයට නම් ගෙවිය යුතු ණය වාරිකයක අගය සොයන්න.

5. කුමාර් මහතා රුපියල් 12 000ක ණය මුදලක් සමාන මාසික වාරික 6කින් ගෙවා නිම කිරීමට ලබා ගෙන ඇත. මාසික වාරිකයක වටිනාකම රුපියල් 2 100කි.

(i) මාසික ව ගෙවිය යුතු ණය මුදලේ කොටස සොයන්න.
(ii) වාරික ලෙස ගෙවිය යුතු මුළු මුදල සොයන්න.
(iii) ගෙවිය යුතු මුළු පොලිය සොයන්න.
(iv) මාස ඒකක ගණන සොයන්න.
(v) මාස ඒකකයකට පොලිය සොයන්න.
(vi) වාර්ෂික පොලී අනුපාතිකය සොයන්න.

6. අත්පිට මුදලට රුපියල් 36 000ක් වූ ශීතකරණයක් මුලින් රුපියල් 6 000ක් ගෙවා ඉතිරිය රුපියල් 1 500 බැගින් සමාන මාසික වාරික 24කින් ගෙවා නිම කිරීමට ලබාගත හැකි ය. පොලිය ගණනය කර ඇත්තේ හීන වන ශේෂ ක්‍රමයට නම්, අය කර ඇති වාර්ෂික පොලී අනුපාතිකය සොයන්න.

7. රෙදි මහන යන්ත්‍රයක් අත්පිට මුදලට රුපියල් 23 000කට විකිණේ. වාරික ලෙස ගෙවීමේ ක්‍රමයට පළමු ව රුපියල් 5 000ක් ගෙවා ඉතිරිය රුපියල් 2 000 බැගින් සමාන මාසික වාරික 10කින් ගෙවා නිම කිරීමට ද ඉහත යන්ත්‍රය මිල දී ගත හැකි ය. ණය සඳහා පොලිය ගණනය කරනු ලබන්නේ හීන වන ශේෂ ක්‍රමයට නම්, අය කෙරෙන වාර්ෂික සුළු පොලී අනුපාතිකය සොයන්න.

9.2 වැල් පොලිය

ණය මුදලක් හෝ තැන්පත් මුදලක් සඳහා පොලිය ගණනය කරන තවත් ක්‍රමයක් ලෙස වැල් පොලී ක්‍රමය හැඳින්වීමට හැකි ය. මෙම ක්‍රමය යටතේ පොලිය ගණනය කෙරෙන ආකාරය නිදසුනක් ඇසුරෙන් විමසා බලමු.

10%ක වාර්ෂික පොලියක් ගෙවන බැංකුවක වසර 3ක කාලයක් තුළ රුපියල් 25 000ක ස්ථාවර තැන්පතුවක් පවත්වාගෙන ගිය පුද්ගලයකුට වසර 3 අවසානයේ බැංකුව මගින් ලබා දී ඇති ගිණුම් වාර්තාවක් පහත දැක්වේ.

දිනය	විස්තරය	තැන්පත් මුදල (රු)	පොලිය (රු)
2013.01.01	මුදල් තැන්පතු	25 000.00	_
2013.12.31	පොලිය	_	2 500.00
2014.01.01	ශේෂය	27 500.00	_
2014.12.31	පොලිය	_	2 750.00
2015.01.01	ශේෂය	30 250.00	_
2015.12.31	පොලිය	_	3 025.00
2016.01.01	ශේෂය	33 275. 00	_

ඉහත වාර්තාව අනුව මුදල් තැන්පත්කරුට 2013 වර්ෂය සඳහා රුපියල් 2 500ක පොලී මුදලක් ලැබී ඇත. එම පොලී මුදල රුපියල් 25 000ක් වූ තැන්පතු මුදලින් 10%ක් බව පැහැදිලි ය. එම වාර්තාවට අනුව 2014.01.01 දිනට ගිණුමේ තැන්පත් ව ඇති මුළු මුදල ලෙස සලකා ඇත්තේ මුලින් තැන්පත් කළ මුදල හා 2013 වර්ෂයට ලැබුණු පොලී මුදලේ එකතුව වූ රුපියල් 27 500කි. තව ද, 2014 වර්ෂය සඳහා ලැබී ඇති පොලිය රුපියල් 2 750ක් වන අතර, එය රුපියල් 27 500ක් වූ මුළු මුදලින් 10%ක් බව පැහැදිලි ය. මේ ආකාරයට සෑම වර්ෂයක් අවසානයේ ම ලැබෙන පොලිය, පොලිය ගණනය කෙරෙන මුදලට එකතු කර ලැබෙන අගය මුළු මුදල ලෙස සලකා, ඊළඟ වර්ෂය සඳහා පොලිය ගණනය කර ඇති බව පෙනේ.

මේ ආකාරයට සෑම වසරක දී ම පොලිය ගණනය කිරීමේ දී මුල් මුදලට පමණක් නො ව වාර්ෂික ව එකතු වී ඇති පොලියට ද පොලියක් ලබා දී ඇත. එම නිසා මෙම ක්‍රමයට පොලිය ගණනය කිරීමේ ක්‍රමය **වැල් පොලී** ක්‍රමය ලෙස හැඳින්වේ.

තැන්පත් මුදල් සඳහා පොලිය ගණනය කිරීමේ දී මෙන් ම ණය මුදලක් ලබා ගැනීමේ දී ද, ණය මුදල සඳහා පොලිය ගණනය කිරීම වැල් පොලී ක්‍රමයට සිදු කරනු ලැබේ.

නිදසුන 1

10%ක වාර්ෂික වැල් පොලී අනුපාතිකයක් යටතේ රුපියල් 10 000ක් ණයට ගත් පුද්ගලයකුට අවුරුදු 2ක් අවසානයේ දී ණයෙන් නිදහස් වීම සඳහා ගෙවිය යුතු මුළු මුදල සොයන්න.

ණයට ගත් මුදල = රු 10 000

වාර්ෂික වැල් පොලී අනුපාතිකය = 10%

පළමු අවුරුද්ද සඳහා පොලිය $=$ රු $10\,000 \times \frac{10}{100}$

$=$ රු 1 000

පළමු අවුරුද්ද අවසානයේ මුළු මුදල $=$ රු $10\,000 + 1\,000$

$=$ රු 11 000

දෙවන අවුරුද්ද සඳහා පොලිය $= \text{රු } 11\,000 \times \frac{10}{100}$
$= \text{රු } 1\,100$
දෙවන අවුරුද්ද අවසානයේ මුළු මුදල $= \text{රු } 11\,000 + 1\,100$
$= \underline{\underline{\text{රු } 12\,100}}$

වැල් පොලී ක්‍රමයට පොලිය ඉහත පරිදි එක් එක් වසර සඳහා වෙන වෙන ම සොයා, ණය මුදලට එකතු කර, මුළු මුදල සෙවිය හැකි ය.

නිදසුන 2

අමල් රුපියල් 50 000ක් 6%ක වාර්ෂික වැල් පොලී අනුපාතිකයක් යටතේ වසර තුනක් සඳහා ස්ථිර තැන්පතුවක් ලෙස බැංකුවක ආයෝජනය කරයි. නිමල් රුපියල් 50 000ක් 6%ක වාර්ෂික සුළු පොලී අනුපාතිකයක් යටතේ බැංකුවක තැන්පත් කරයි. වසර තුනක් අවසානයේ දී අමල්ට හා නිමල්ට හිමි වන මුළු මුදල් ප්‍රමාණය වෙන වෙන ම සොයන්න.

පළමුවැනි අවුරුද්ද අවසානයේ අමල්ට ලැබෙන මුළු මුදල $= \text{රු } 50\,000 \times \frac{106}{100}$
$= \text{රු } 53\,000.00$

දෙවැනි අවුරුද්ද අවසානයේ අමල්ට ලැබෙන මුළු මුදල $= \text{රු } 53\,000 \times \frac{106}{100}$
$= \text{රු } 56\,180.00$

තුන්වැනි අවුරුද්ද අවසානයේ අමල්ට ලැබෙන මුළු මුදල $= \text{රු } 56\,180 \times \frac{106}{100}$
$= \underline{\underline{\text{රු } 59\,550.80}}$

වසර 3 අවසානයේ නිමල්ට ලැබෙන මුළු පොලිය $= \text{රු } 50\,000 \times \frac{6}{100} \times 3$
$= \text{රු } 9\,000.00$

වසර 3 අවසානයේ නිමල්ට ලැබෙන මුළු මුදල $= \text{රු } 9\,000 + 50\,000$
$= \underline{\underline{\text{රු } 59\,000.00}}$

අමල්ට වසර 3 අවසානයේ ලැබෙන මුළු මුදල $= \text{රු } 50\,000 \times \frac{106}{100} \times \frac{106}{100} \times \frac{106}{100}$

$= \text{රු } 59\,550.80$

ලෙස ද ලබා ගත හැකි ය.

9.2 අභ්‍යාසය

1. අවුරුද්දට 5% බැගින් වූ වැල් පොලියට රුපියල් 5 000ක ණය මුදලක් ලබාගත් පුද්ගලයකු වසර 2කට පසු ණයෙන් නිදහස් වීමට ගෙවිය යුතු මුළු මුදල කීය ද?

2. අවුරුද්දට 7% බැගින් වූ වැල් පොලියට රුපියල් 6 000ක් බැංකුවක තැන්පත් කළ පුද්ගලයකුට අවුරුදු 2කට පසු හිමි වන මුළු මුදල සොයන්න.

3. රාධා 12% බැගින් වූ වාර්ෂික වැල් පොලී අනුපාතිකයක් යටතේ රුපියල් 8 000ක් බැංකුවක තැන්පත් කරයි. වසරකට පසු බැංකු පොලී අනුපාතිකය 10% දක්වා පහළ වැටිණි නම්, වසර 2කට පසු රාධාට ලැබෙන මුළු පොලී මුදල ගණනය කරන්න.

4. හෂාන් හා කාසිම් මිතුරෝ දෙදෙනෙකි. හෂාන් රුපියල් 25 000ක මුදලක් 15% ක වාර්ෂික සුළු පොලියට ද කාසිම් රුපියල් 25 000ක මුදලක් 14%ක වාර්ෂික වැල් පොලියට ද එක ම දිනක දී ණයට දී ඇත් නම් වසර 3කට පසු වැඩි මුදලක් ලැබෙන්නේ කාට දැයි ගණනය කරන්න.

5. 12%ක වාර්ෂික වැල් පොලී අනුපාතිකයක් ගෙවන බැංකුවක් සෑම මාස 6කට වරක් ම බැංකුවේ තැන්පත් මුදල් සඳහා පොලිය ගණනය කර එම පොලිය මුල් මුදලට එකතු කරනු ලැබේ. වසරක් ආරම්භයේ රුපියල් 40 000ක මුදලක් එම බැංකුවේ තැන්පත් කළ පුද්ගලයකුට වසරක් අවසානයේ හිමි වන මුළු මුදල කොපමණ ද?

6. 8%ක වාර්ෂික වැල් පොලියට යම්කිසි මුදලක් ණයට දී ඇති පුද්ගලයකුට දෙවන වසර අවසානයේ ලැබුණු පොලී මුදල රුපියල් 432ක් නම්, ණයට දී ඇති මුදල ගණනය කරන්න.

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. රූපවාහිනී යන්ත්‍රයක විකුණුම් මිල රුපියල් 45 000කි. එක වර මුදල් ගෙවා රූපවාහිනී යන්ත්‍රය මිල දී ගන්නා අයකුට 6%ක වට්ටමක් හිමි වන අතර, වාරික ලෙස ගෙවීම සඳහා ලබා ගන්නා තැනැත්තෙකුට මුලින් රුපියල් 9 000ක් ගෙවා ඉතිරිය සමාන මාසික වාරික 12කින් ගෙවා නිම කළ හැකි ය. ණය මුදල් සඳහා හීන වන ශේෂ ක්‍රමයට 24%ක වාර්ෂික පොලියක් අය කෙරේ.

   (i) අත්පිට මුදලට රූපවාහිනිය මිල දී ගැනීමේ දී ගෙවිය යුතු මුළු මුදල කොපමණ ද?
   (ii) ගෙවීමේ ක්‍රමයට මිල දී ගැනීමේ දී ගෙවිය යුතු මුළු මුදල කොපමණ ද?
   (iii) අත්පිට මුදලට රූපවාහිනිය මිල දී ගැනීමේ දී ගෙවීමේ ක්‍රමයට ලබා ගැනීමට වඩා කොපමණ වාසියක් හිමි වේ ද?

2. මිනිසෙක් 4.2% ක වාර්ෂික වැල් පොලී අනුපාතිකයක් යටතේ රුපියල් 100 000ක මුදලක් ණයට ගෙන එම මුදල 8% ක වාර්ෂික වැල් පොලී අනුපාතිකයක් ගෙවන බැංකුවක තැන්පත් කරයි. වසර 2කට පසු තැන්පත් මුදල ලබා ගෙන, ණය මුදල ගෙවා දමයි නම්, එම ආයෝජනයේ දී ඔහු ලැබූ ලාභය ගණනය කරන්න.

3. මිනිසෙක් එක්තරා වැල් පොලී අනුපාතිකයකට මුදලක් ණයට ගනියි. අවුරුදු 2කට පසු ණයෙන් නිදහස් වීමට නම් රුපියල් 14 400ක් ද අවුරුදු 3කට පසු ණයෙන් නිදහස් වීම සඳහා රුපියල් 17 280ක් ද ගෙවිය යුතු නම්, ණයට ගත් මුදල හා වාර්ෂික පොලී අනුපාතිකය සොයන්න.

10 කොටස් වෙළෙඳපොළ

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට

- කොටස් වෙළෙඳපොළ හා එහි ස්වභාවය හඳුනා ගැනීමට
- කොටස් වෙළෙඳපොළ ආශ්‍රිත විශේෂිත වචන හඳුනා ගැනීමට
- සමාගම්වල මුදල් ආයෝජනයෙන් ලැබෙන ලාභාංශ ගණනය කිරීමට
- කොටස් ආශ්‍රිත ගැටලු විසඳීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

හැඳින්වීම

අප රටේ පවත්වා ගෙන යන ව්‍යාපාර අතරින් 2007 අංක 7 දරණ සමාගම් පනත යටතේ ලියාපදිංචි වූ සමාගම් පිළිබඳ ව මෙම පාඩමේදී සලකා බැලේ. මෙම සමාගම්වල හිමිකාරිත්වය තනි පුද්ගලයකු හෝ පුද්ගලයන් කිහිපදෙනකු සතු විය හැකි ය. සීමාසහිත සමාගම්වල ස්වරූපය අනුව, ඒවා

- සීමාසහිත පෞද්ගලික සමාගම් හෝ
- සීමාසහිත පොදු සමාගම් ලෙස වර්ග කෙරී ඇත.

සීමාසහිත පොදු සමාගම්වලට සිය ව්‍යාපාර ආරම්භ කිරීමට හෝ පවත්වා ගෙන යෑමට අවශ්‍ය මූල්‍ය සම්පත් සපයා ගැනීම සඳහා මහජනතාව ද හවුල් කර ගත හැකි ය. මේ සඳහා අද ව්‍යාපාර ලෝකයේ පවතින ජනප්‍රිය ක්‍රමයක් වන්නේ විවෘත මාධ්‍ය නිවේදනයක් මගින් මහජනතාව වෙත, සමාගමේ කොටස් මිල දී ගන්නා ලෙස දන්වා සිටීමයි. මහජනතාව කොටස් මිල දී ගත් පසු, ඔවුන්ට තම කොටස් වෙනත් පුද්ගලයන්ට විකිණිය හැකි ය. එසේ කොටස් මිල දී ගැනීම හා විකිණීම සඳහා පහසුකම් සපයා ඇති ස්ථානය කොටස් වෙළෙඳපොළ ලෙස හැඳින්වේ.

කොටස් වෙළෙඳපොළ

"කොළඹ ව්‍යාපාර වස්තු හුවමාරුව" ලෙස ද හැඳින්වෙන කොටස් වෙළෙඳපොළ පාලනය වන්නේ ශ්‍රී ලංකා සුරැකුම්පත් හා විනිමය කොමිෂන් සභාව මගිනි. මෙම කොමිෂන් සභාව මගින් කොටස් වෙළෙඳපොළේ වැඩ කටයුතු සඳහා මග පෙන්වීම, මෙහෙයවීම හා නියාමනය කරනු ලබයි. කොටස් ගනුදෙනු සඳහා කොටස් වෙළෙඳපොළට ඇතුළත් වන සමාගම්, එම වෙළෙඳපොළේ ලියාපදිංචි වී, ලැයිස්තුගත සමාගම් ලෙස සමාගම් ලේඛනයට ඇතුළත් විය යුතු ය. 2015 වර්ෂයේ අප්‍රේල් 21 වන විට මෙසේ ලැයිස්තුගත සමාගම් ගණන 297ක් විය. එම සමාගම්වල කොටස් මිල දී ගැනීමේ දී හෝ විකිණීමේ දී ගනුදෙනුකරුවන්ට සහාය වීම පිණිස, තැරැව්කාර සමාගම් ද කොටස් වෙළෙඳපොළ

තුළ ක්‍රියාත්මක වේ. ගනුදෙනුකරුවන්ට, කොටස් වෙළෙඳපොළෙහි ගනුදෙනු සජීව අන්තර්ජාලය ඔස්සේ යාවත්කාලීන වන අතර, මහජනතාවට අන්තර්ජාලය ඔස්සේ ගනුදෙනු කිරීමේ පහසුකම් ද සපයා තිබේ.

10.1 කොටස්

ලැයිස්තුගත සීමාසහිත පොදු සමාගම් සිය ප්‍රාග්ධනය රැස් කර ගැනීමට මහජනතාව සම්බන්ධ කර ගන්නේ 'කොටස්' නමින් හැඳින්වෙන ඒකකය මගිනි. සමාගමේ ආරම්භක ප්‍රාග්ධනය, ඒකකයක් ලෙස සලකා එය සමාන කොටස්වලට හෙවත් පංගුවලට බෙදූ විට ඉන් එක් පංගුවක් එක් 'කොටසක්' ලෙස හැඳින්වේ.

යම් සමාගමක්, මුල් වරට සිය ආරම්භක කොටස් මහජනතාව වෙත නිකුත් කිරීමේ දී, එක් කොටසක් සඳහා මිලක් එම සමාගම විසින් ම නියම කරනු ලැබේ. එම මිලට, යම් ආයෝජකයකුට සමාගමේ කොටස් ඕනෑ ම ප්‍රමාණයක් මිල දී ගත හැකි ය. යම් සමාගමක කොටස් මිල දී ගත් ආයෝජකයකුට ඔහු ලබා ගත් කොටස් ප්‍රමාණයට සමානුපාතික ව එම සමාගමේ හිමිකාරිත්වය ලැබේ.

මේ පිළිබඳ තව දුරටත් අවබෝධ කර ගැනීම සඳහා පහත දී ඇති නිදසුන සලකා බලන්න.

යම් සමාගමක් විසින් මහජනතාව සඳහා නිකුත් කරන ලද කොටස් 100 000කින් ආයෝජකයෙක් කොටස් 10 000ක් මිල දී ගනියි. එවිට ආයෝජකයාට සමාගමේ $\frac{10\,000}{100\,000}$ ක හිමිකාරිත්වයක් ලැබේ. එය ප්‍රතිශතයක් ලෙස දක්වමු.

$$\frac{10\,000}{100\,000} \times 100\% \quad = 10\%$$

එමනිසා ආයෝජකයා සමාගමෙන් 10%ක හිමිකාරිත්වයක් ලබයි.

නිදසුන 1

C නමැති සමාගමක්, තම ප්‍රාග්ධනය ලෙස ඇති රුපියල් 10 000 000, එක් කොටසක් රුපියල් 100 බැගින් වන කොටස් 100 000කට වෙන් කොට මහජනතාව වෙත නිකුත් කරයි. විශ්වා එම සමාගමේ කොටස් 5000ක් මිල දී ගනියි.

(i) කොටස් මිල දී ගැනීම නිසා විශ්වා C සමාගමේ ලැබූ හිමිකාරිත්වය
  (a) භාගයක් ලෙස
  (b) ප්‍රතිශතයක් ලෙස දක්වන්න.
(ii) විශ්වා C සමාගමෙහි ආයෝජනය කළ මුදල සොයන්න.

(i) සමාගම නිකුත් කළ මුළු කොටස් ගණන = 100 000
විශ්වා මිල දී ගත් කොටස් ගණන = 5 000

(a) සමාගමේ, විශ්වාගේ හිමිකාරිත්වය භාගයක් ලෙස $= \dfrac{5\ 000}{100000} = \dfrac{1}{20}$

(b) ප්‍රතිශතයක් ලෙස $= \dfrac{1}{20} \times 100\%$
$= \underline{\underline{5\%}}$

(ii) කොටසක මිල = රු 100
විශ්වා මිල දී ගත් කොටස් = 5 000
ආයෝජනය කළ මුදල = රු $100 \times 5\ 000$
= $\underline{\underline{\text{රු } 500\ 000}}$

කොටස් සඳහා ලාභාංශ

ලැයිස්තුගත සමාගම්, සිය ආරම්භක කොටස් නිකුත් කිරීමේ දී ම සමාගමේ ලාභයෙන් කොටස්කරුවන් සඳහා ප්‍රතිලාභ ලෙස නිකුත් කරන මුදල් ප්‍රමාණය නිවේදනය කරයි. එය එක් කොටසක් සඳහා ගෙවන මුදල මගින් දැක්වේ. එසේ ගෙවන මුදල් වාර්ෂික ව හෝ කාර්තු වශයෙන් හෝ ගෙවනු ලබන අතර, ඒවා 'ලාභාංශය' ලෙස හැඳින්වේ.

උදාහරණයක් ලෙස, සමාගමක් සිය කොටස්කරුවන් සඳහා කොටසකට රුපියල් 5ක වාර්ෂික ලාභාංශයක් ගෙවයි. මෙම ලාභාංශය, සමාගමේ තීරණය පරිදි වරින් වර වෙනස් කිරීමට හැකියාව පවතී. මෙය තවදුරටත් පැහැදිලි කර ගැනීම සඳහා නැවතත් ඉහත සැලකූ නිදසුන 1 සැලකිල්ලට ගනිමු.

නිදසුන 1

විශ්වා මිල දී ගත් රුපියල් 100යේ කොටස් 5 000 සඳහා C සමාගම එක් කොටසකට රුපියල් 4ක වාර්ෂික ලාභාංශයක් ගෙවයි.

(i) විශ්වා කොටස් ආයෝජනයෙන් ලබන වාර්ෂික ආදායම සොයන්න.
(ii) විශ්වාට ලැබෙන වාර්ෂික ආදායම, යෙදූ මුදලේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස දක්වන්න.

(i) විශ්වා සතු කොටස් ගණන = 5000
කොටසක් සඳහා වාර්ෂික ලාභාංශය = රු 4
$\therefore$ විශ්වා ලබන වාර්ෂික ආදායම = රු 5000×4
= $\underline{\underline{\text{රු } 20\ 000}}$

(ii) විශ්වා ආයෝජනය කළ මුදල $=$ රු 100 $\times$ 5 000

$= $ රු 500 000

$\therefore$ ඔහුගේ වාර්ෂික ආදායම ප්‍රතිශතයක් ලෙස $= \frac{20\,000}{500\,000} \times 100\%$

$= \underline{\underline{4\ \%}}$

දැන් කොටස් ආයෝජනයේ මූලික අවස්ථාවට අදාළ කරුණු ඇතුළත් පහත අභ්‍යාසයන්හි යෙදෙන්න.

10.1 අභ්‍යාසය

1. ආයෝජකයෙක් සසිරි ඇඟලුම් සමාගමේ කොටසක් රුපියල් 25 බැගින්, කොටස් 1000ක් මිල දී ගත්තේ ය.

(i) ඔහු ආයෝජනය කළ මුදල කීය ද?

(ii) සමාගම වාර්ෂික ලාභාංශය ලෙස කොටසකට රුපියල් 4ක් ගෙවයි නම් ආයෝජකයාගේ වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම සොයන්න.

2. පහත දැක්වෙන වගු සම්පූර්ණ කරන්න.

(i)

කොටසක මිල රුපියල්	කොටස් ගණන	ආයෝජනය කළ මුදල රුපියල්
10	2500	....
20	5000	....
....	500	50 000
....	4000	80 000
30	....	30 000
45	....	135 000

(ii)

කොටස් ගණන	වාර්ෂික ලාභාංශය කොටසකට (රු)	වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම රුපියල්
500	2	....
1000	3.50	....
....	5	5000
....	2.50	500 000
2000	....	8000
750	....	2250

3. සීමාසහිත පොදු සමාගමක් සිය ප්‍රාග්ධනය රැස් කර ගැනීම සඳහා කොටසක් රුපියල් 25ක් වූ කොටස් 10 000 000ක් මහජනතාව වෙත නිකුත් කරයි. එම කොටස් සඳහා වාර්ෂික ලාභාංශය කොටසකට රුපියල් 5 කි. එම සමාගමේ ආයෝජනය සඳහා ඉදිරිපත් වන සුජීව, සමාගමේ කොටස් 50 000ක් මිල දී ගනියි.

(i) සමාගමේ ප්‍රාග්ධනය සොයන්න.

(ii) සුජීව සමාගමේ ආයෝජනය කරන මුදල සොයන්න.

(iii) කොටස් ආයෝජනයෙන් සුජීවට වාර්ෂික ව ලැබෙන ලාභාංශය සොයන්න.

(iv) සුජීවගේ වාර්ෂික ලාභාංශය ඔහු යෙදූ මුදලෙන් කවර ප්‍රතිශතයක් ද?

4. වාර්ෂික ලාභාංශය කොටසකට රුපියල් 3 බැගින් ගෙවන සමාගමක යම් කොටස් ගණනක්, කොටසක් රුපියල් 20 බැගින් මහේල මිල දී ගත්තේ ය. ඔහු එම ආයෝජනයෙන් වර්ෂය අවසානයේ දී රුපියල් 12 000ක ලාභාංශ ආදායමක් ලැබී ය.

(i) සමාගමේ මහේල සතු කොටස් ගණන සොයන්න.

(ii) කොටස් මිල දී ගැනීම සඳහා මහේල ආයෝජනය කළ මුදල සොයන්න.

5. ගනේෂ් තමා සතු ව තිබූ රුපියල් 100 000ක මුදලින් හරි අඩක්, වාර්ෂික ව කොටසකට රුපියල් 4 බැගින් ගෙවන එක්තරා සමාගමක රුපියල් 25 කොටස් යම් ප්‍රමාණයක් මිල දී ගැනීමටත්, ඉතිරි අඩ වාර්ෂික ව 12%ක පොලියක් ගෙවන මූල්‍ය ආයතනයක තැන්පත් කිරීමටත් තීරණය කළේ ය. වසරකට පසු ගනේෂ්ට වඩා වාසිදායක කුමන ආයෝජනය දැයි හේතු දක්වමින් පෙන්වන්න.

10.2 කොටස් වෙළෙඳපොළ ගනුදෙනු

තම කොටස් ගනුදෙනු සඳහා කොටස් වෙළෙඳපොළට ඇතුළත් වීමට අවස්ථාව ලැබෙන්නේ එහි ලැයිස්තුගත සමාගම්වලට පමණක් බව අපි දනිමු. එවැනි සමාගමක් ආරම්භයේදී ම මහජනතව වෙත කොටස් නිකුත් කිරීමෙන් පසු සිදු වන කොටස් ගනුදෙනු පිළිබඳ ව හැදෑරීමට පහත සටහනට අවධානය යොමු කරන්න.

සීමාසහිත නෙත්මි සමාගම, කොටසකට රුපියල් 2 බැගින් වාර්ෂික ව ලාභාංශ ගෙවන කොටස් 100 000ක් එක් කොටසක් රුපියල් 10ක් වූ ආරම්භක හඳුන්වා දීමේ මිලකට මහජනතාව වෙත නිකුත් කළේ ය. වර්ෂයකට පසු මෙම සමාගමේ කොටසක මිල කොටස් වෙළෙඳපොළේ රුපියල් 20 තෙක් ඉහළ නැග තිබිණි. එම අවස්ථාවේ නදීශා ඉහත සමාගමේ කොටස් 1000ක් මිල දී ගත්තා ය. වර්ෂ කිහිපයකට පසු එම සමාගමේ කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 28ක් තෙක් ඉහළ නැගි අවස්ථාවේ දී ඇය තමා සතු කොටස් 1000 ම විකුණුවා ය.

යම් සමාගමක කොටස් හඳුන්වා දීමේ ආරම්භක මිල යටතේ ආයෝජකයන්ට කොටස් මිල දී ගැනීම සිදු වන අවස්ථාව කොටස් වෙළෙඳපොළේ **"ප්‍රාථමික වෙළෙඳපොළ"** ලෙස හැඳින්වේ. ප්‍රාථමික වෙළෙඳපොළේ දී ආයෝජකයන්ට හැකි වන්නේ කොටස් මිල දී ගැනීම පමණි. එහෙත් ඊට පසු ව කොටස් ගනුදෙනුවට ඉඩ ලබා දෙමින් කොටසක් සඳහා ඇති ඉල්ලුම අනුව කොටස සඳහා අලුත් මිලක් ඇති විය හැකි ය. එම මිල එම අවස්ථාවේ **වෙළෙඳපොළ මිල** ලෙස හැඳින්වේ. මෙම අවස්ථාව කොටස් වෙළෙඳපොළේ **"ද්විතියික වෙළෙඳපොළ"** ලෙස හැඳින්වේ. ඉහත නෙත්මි සමාගමේ කොටසක මිල රුපියල් 20 තෙක් ඉහළ නැග, නැවතත් වසර කිහිපයකින් රුපියල් 28 තෙක් වැඩි විය. මේ ආකාරයට කොටසක වෙළෙඳපොළ මිලේ අඩු වැඩි වීම ද්විතීයික වෙළෙඳපොළේ දී සිදු වේ. එම අවස්ථාවේ දී ආයෝජකයන්ට තමා සතු කොටස් විකිණීමට හෝ අලුත් කොටස් මිල දී ගැනීමට හෝ හැකි ය.

ප්‍රාග්ධන ලාභය

සමාගමක කොටස් එහි හඳුන්වා දීමේ මිලට හෝ වෙළෙඳපොළ මිලට හෝ මිල දී ගත් විට එම මිල **කොටසක ගැණුම් මිල** ලෙසත් එම කොටස්, වෙළෙඳපොළ මිලට විකුණනු ලබන මිල **කොටසක විකුණුම්** මිල ලෙසත් හැඳින්වේ.

ආයෝජකයකු කොටස් විකිණීමේ දී ලාභයක් හෝ අලාභයක් සිදු විය හැකි ය. තමා සතු කොටස් විකිණීමේ දී,

විකුණුම් මිල > ගැණුම් මිල නම්, එවිට ප්‍රාග්ධන ලාභයක් ලැබෙන අතර,

ප්‍රාග්ධන ලාභය = කොටස්වල විකුණුම් මිල – කොටස්වල ගැනුම් මිල

ලෙස අර්ථ දැක්වේ.

එසේ ම,

විකුණුම් මිල < ගැනුම් මිල නම්, ප්‍රාග්ධන අලාභයක් සිදු වන අතර,

ප්‍රාග්ධන අලාභය = කොටස්වල ගැනුම් මිල – කොටස්වල විකුණුම් මිල

ලෙස අර්ථ දැක්වේ.

නිදසුන 1

කොටස් වෙළෙඳපොළ සමග සම්බන්ධ ආයෝජකයකු වන පෙරේරා මහතා එක්තරා සමාගමක කොටස් 2000ක්, කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 20ක් ව පැවති අවස්ථාවේ දී මිල දී ගත්තේ ය. එම සමාගමේ කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 25 තෙක් ඉහළ නැගි අවස්ථාවක ඔහු තමා සතු එම සමාගමේ කොටස් සියල්ල විකුණා දැමී ය. පෙරේරා මහතා,

(i) සමාගමේ ආයෝජනය කළ මුදල සොයන්න.
(ii) කොටස් විකිණීමෙන් ඔහු ලත් මුදල සොයන්න.
(iii) ලැබූ ප්‍රාග්ධන ලාභය සොයන්න.
(iv) ලැබූ ප්‍රාග්ධන ලාභය ආයෝජනයේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස දක්වන්න.

(i) සමාගමේ ආයෝජනය කළ මුදල $= \text{රු } 20 \times 2\,000$
$= \underline{\underline{\text{රු } 40\,000}}$

(ii) කොටස් විකිණීමෙන් ලැබෙන මුදල $= \text{රු } 25 \times 2\,000$
$= \underline{\underline{\text{රු } 50\,000}}$

(iii) ප්‍රාග්ධන ලාභය $= \text{රු } 50\,000 - 40\,000$
$= \underline{\underline{\text{රු } 10\,000}}$

(iv) ප්‍රාග්ධන ලාභය ආයෝජනයේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස $= \dfrac{10\,000}{40\,000} \times 100\%$

$= \underline{\underline{25\%}}$

ඉහත (iv) හි සඳහන් ප්‍රාග්ධන ලාභ ප්‍රතිශතය කොටසක මිල ඇසුරෙන් ද ලබා ගත හැකි ය.

කොටසක ගැණුම් මිල = රු 20
කොටසක විකුණුම් මිල = රු 25

$\therefore$ ප්‍රාග්ධන ලාභය ප්‍රතිශතයක් ලෙස $= \dfrac{25 - 20}{20} \times 100\%$

$= \dfrac{5}{20} \times 100\%$

$= \underline{\underline{25\%}}$

නිදසුන 2

මොහොමඩ් මහතා තමා සතු ව තිබූ රුපියල් 96 000ක මුදලකින් යම් ප්‍රමාණයක්, වාර්ෂික ලාභාංශ ලෙස කොටසකට රුපියල් 2 බැගින් ගෙවන A නම් සමාගමේ යම් කොටස් ගණනක්, කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 18 බැගින් මිල දී ගැනීමට යෙදවී ය. ඉතිරි කොටස වාර්ෂික ලාභාංශ ලෙස කොටසකට රුපියල් 3.50 බැගින් ගෙවන B නම් සමාගමේ යම් කොටස් ගණනක්, කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 21 බැගින් මිලදී ගැනීමට යෙදවී ය. වර්ෂයක් අවසානයේ A නම් සමාගමේ වාර්ෂික ලාභාංශ ලෙස ලැබූ මුදලට වඩා රුපියල් 1000ක් වැඩියෙන් B සමාගමෙන් ලාභාංශ ලෙස ඔහුට ලැබිණි.

(i) මොහොමඩ් මහතා, A සමාගමේ ආයෝජනය කළ මුදල x ලෙස ගෙන, x ඇතුළත් සමීකරණයක් ගොඩනගන්න.
(ii) ඉහත ලබා ගත් සමීකරණය විසඳා, ඔහු එක් එක් සමාගමේ ආයෝජනය කළ මුදල සොයන්න.
(iii) සමාගම් දෙකේ ඔහුට තිබූ කොටස් ප්‍රමාණ වෙන වෙන ම සොයන්න.
(iv) එක් එක් සමාගමෙන් ලැබූ වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම සොයන්න.

වාර්ෂික ආදායම ලැබීමෙන් පසු මොහොමඩ් මහතා සමාගම් දෙකේ ම ඔහු සතු සියලු කොටස් එවකට සමාගම් දෙකේ ම කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල වූ රුපියල් 20 බැගින් විකුණා දැමී ය.

(v) සමාගම් දෙකේ කොටස් විකිණීමෙන් ලැබූ මුළු මුදල සොයන්න.

(vi) සමාගම් දෙකේ ම ආයෝජනයෙන් වර්ෂය අවසානයේ ලැබෙන ලාභාංශ ආදායමේත් ප්‍රාග්ධන ලාභයේත් එකතුව යෙදූ මුදලින් 20%ක් විය යුතු බවට වූ මොහොමඩ් මහතාගේ බලාපොරොත්තුව ඉටු නොවූ බව පෙන්වන්න.

(i) A සමාගමෙන් ගත් කොටස් ගණන $= \dfrac{x}{18}$

A සමාගමේ වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම $=$ රු $\dfrac{x}{18} \times 2 = \dfrac{x}{9}$

එලෙස ම,

B සමාගමේ වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම $=$ රු $\dfrac{(96\,000 - x)}{21} \times 3.50$

$=$ රු $\dfrac{(96\,000 - x)}{21} \times \dfrac{7}{2}$

$=$ රු $\dfrac{(96\,000 - x)}{6}$

$\therefore \quad \dfrac{(96\,000 - x)}{6} - \dfrac{x}{9} = 1000$ යනු අවශ්‍ය සමීකරණය යි.

(ii)
$$\frac{(96\,000 - x)}{6} - \frac{x}{9} = 1000$$
$$18 \times \frac{(96\,000 - x)}{6} - 18 \times \frac{x}{9} = 18 \times 1000$$
$$3\,(96\,000 - x) - 2x = 18\,000$$
$$288\,000 - 3x - 2x = 18\,000$$
$$288\,000 - 18\,000 = 5x$$
$$270\,000 = 5x$$
$$x = 54\,000$$

$\therefore$ A සමාගමේ ආයෝජනය කළ මුදල රු 54 000 වේ.

B සමාගමේ ආයෝජනය කළ මුදල $=$ රු $96\,000 - 54\,000 =$ රු $\underline{\underline{42\,000}}$

(iii) A සමාගමේ හිමි ව තිබූ කොටස් ගණන $= \dfrac{54\,000}{18} = \underline{\underline{3000}}$

B සමාගමේ හිමි ව තිබූ කොටස් ගණන $= \dfrac{42\,000}{21} = \underline{\underline{2000}}$

(iv) A සමාගමේ ආයෝජනයෙන් ලැබූ ආදායම $=$ රු $3000 \times 2 =$ $\underline{\underline{\text{රු } 6000}}$

B සමාගමේ ආයෝජනයෙන් ලැබූ ආදායම $=$ රු $2000 \times 3.50 =$ $\underline{\underline{\text{රු } 7000}}$

(v) A සමාගමේ කොටස් විකිණීමෙන් ලැබූ මුදල $=$ රු $3000 \times 20 = \underline{\underline{60\,000}}$

B සමාගමේ කොටස් විකිණීමෙන් ලැබූ මුදල $=$ රු $2000 \times 20 = \underline{\underline{40\,000}}$

$\therefore$ සමාගම් දෙකේ ම කොටස් විකිණීමෙන් ලැබූ මුළු මුදල $=$ රු $60\,000 + 40\,000$
$=$ රු $100\,000$

සමාගම් දෙකෙන් ම ලැබූ වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම $=$ රු $6000 + 7000$
$=$ රු $13\,000$

$\therefore$ වර්ෂ අවසානයේ ලාභාංශ ආදායම් හා කොටස් විකිණීමෙන් ලැබූ මුදලේ එකතුව $=$ රු $100\,000 + 13\,000$
$=$ රු $113\,000$

සමාගම් දෙකේ කොටස් ආයෝජනයට යෙදූ මුදල $=$ රු $96\,000$

ලැබූ ලාභය $=$ රු $113\,000 - 96\,000$
$=$ රු $17\,000$

$\therefore$ මුදල් ආයෝජනයෙන් ලැබූ ලාභය යෙදූ මුදලේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස $= \dfrac{17\,000}{96\,000} \times 100\%$
$= 17.7\%$

$17.7\% < 20\%$ නිසා මොහොමඩ් මහතාගේ බලාපොරොත්තුව ඉටු වී නැත.

10.2 අභ්‍යාසය

1. වගුව සම්පූර්ණ කරන්න.

ආයෝජනය කරන මුදල (රුපියල්)	කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල (රුපියල්)	කොටස් ගණන	කොටසකට රුපියල් 3 බැගින් වාර්ෂික ආදායම (රුපියල්) (ලාභාංශය)
50 000	25	....	....
....	40	....	1500
75 000	....	....	3000
....	15	500	....
120 000	....	2000	....

2. වාර්ෂික ලාභාංශය ලෙස කොටසකට රුපියල් 4ක් ගෙවන සමාගමක කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 30ක් වූ කොටස් මිල දී ගැනීමට තරිඳු රුපියල් 60 000ක් යෙදවී ය.

(i) තරිඳු මිල දී ගත් කොටස් ගණන සොයන්න.
(ii) කොටස් ආයෝජනයෙන් තරිඳු ලබන වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම සොයන්න.
(iii) වාර්ෂික ලාභාංශ, යෙදූ මුදලින් කවර ප්‍රතිශතයක් දැයි සොයන්න.

3. රමේෂ් එක්තරා සමාගමක කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 40ක් ව තිබිය දී කොටස් 5000ක් මිල දී ගත්තේ ය. එම කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 50ක් වූ අවස්ථාවේ දී සමාගමේ ඔහු සතු ව තිබූ කොටස් සියල්ල විකුණන ලදි.

(i) කොටස් විකිණීමේ දී රමේෂ් එක් කොටසකින් ලැබූ ප්‍රාග්ධන ලාභය සොයන්න.
(ii) කොටස් සියල්ල විකිණීමෙන් ලබන ප්‍රාග්ධන ලාභය සොයන්න.
(iii) ප්‍රාග්ධන ලාභය, යෙදූ මුදලේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස සොයන්න.

4. ව්‍යාපාරිකයෙක් කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 40ක් වූ එක්තරා සමාගමක කොටස් මිල දී ගැනීම සඳහා රුපියල් 40 000ක් ආයෝජනය කළ අතර, වර්ෂයකට පසු ඔහු යෙදූ මුදලින් 10%ක් ලාභාංශ ලෙස ලබා ගත්තේ ය. එම ආදායම ලබා ගැනීමෙන් පසු කොටසක් රුපියල් 50 බැගින් කොටස් සියල්ල විකුණා දමන ලදි.

(i) ව්‍යාපාරිකයා සමාගමෙන් ලැබූ වාර්ෂික ලාභාංශය සොයන්න.
(ii) සමාගම කොටසක් සඳහා වාර්ෂික ව ගෙවූ ලාභාංශය සොයන්න.
(iii) ව්‍යාපාරිකයා කොටස් විකිණීමෙන් ලැබූ මුදල සොයන්න.
(iv) ව්‍යාපාරිකයාට ලැබෙන ප්‍රාග්ධන ලාභය සොයන්න.
(v) ව්‍යාපාරිකයාගේ ප්‍රාග්ධන ලාභය, යෙදූ මුදලේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස දක්වන්න.

5. කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 20ක් වූ සමාගමක කොටස් මිල දී ගත් පුද්ගලයෙක් කොටස්වල වෙළෙඳපොළ මිල වැඩි වූ අවස්ථාවක තමා සතු කොටස් සියල්ල විකුණා දැමී ය. ඉන් ඔහු ලැබූ ප්‍රාග්ධන ලාභය යෙදූ මුදලින් 80%ක් විය.
   (i) එක් කොටසකින් ඔහු ලැබූ ප්‍රාග්ධන ලාභය කීය ද?
   (ii) කොටසක් විකුණන ලද්දේ කීය බැගින් ද?

6. කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 24ක් වූ සමාගමක, කොටස් මිල දී ගත් කෙනෙකු ආදායම් ලැබීමෙන් පසු එම කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 30ක් වූ අවස්ථාවක විකිණීමෙන් ලැබෙන ප්‍රාග්ධන ලාභය යෙදූ මුදලේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස දක්වන්න.

7. වාර්ෂික ලාභාංශය ලෙස කොටසකට රුපියල් 6ක් ගෙවන සමාගමක කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 40ක් වූ කොටස් 1000ක් හිමි ආයෝජකයෙක් එම කොටස්වලින් එක් වර්ෂයක ලාභාංශ ආදායම් ලැබීමෙන් පසු ඒවායේ වෙළෙඳපොළ මිල වැඩි වූ අවස්ථාවක විකුණා දැමී ය. කොටස් විකිණීමෙන් හා ලාභාංශයෙන් ඔහු ලැබූ මුළු ආදායම රුපියල් 71 000ක් විය.
   (i) කොටස් ආයෝජනයෙන් වර්ෂයකට ලැබූ ලාභාංශ ආදායම කීය ද?
   (ii) ඔහු කොටසක් විකුණන්නට ඇත්තේ කීය බැගින් ද?
   (iii) ඔහු ලැබූ ප්‍රාග්ධන ලාභය සොයන්න.

8. දේවින්ද තමා සතු මුදලින් හරි අඩක් වාර්ෂික ලාභාංශ කොටසකට රුපියල් 4 බැගින් ගෙවනු ලබන හා කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 20 බැගින් වූ කොටස් මිල දී ගැනීමට යෙදවීය. ඉතිරිය වාර්ෂික ලාභාංශ කොටසකට රුපියල් 5 බැගින් ගෙවනු ලබන හා වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 25 බැගින් වූ කොටස් මිල දී ගැනීමට යෙදවී ය. එම ආයෝජන දෙකෙන් ම ඔහු ලැබූ ආදායම යෙදූ මුදලේ ප්‍රතිශතයක් ලෙස දක්වන්න. (ඉඟිය: එක් එක් කොටස් ප්‍රමාණ මිල දී ගැනීමට යෙද වූ මුදල රු x ලෙස ගන්න)

9. ආයෝජකයෙක් තමා ළඟ තිබූ රුපියල් 70 000ක මුදලින් කොටසක් වාර්ෂික ලාභාංශ කොටසකට රුපියල් 3ක් ගෙවනු ලබන සමාගමක යෙදවී ය. කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 30ක් වූ කොටස් ද ඉතිරි කොටස වාර්ෂික ලාභාංශ රුපියල් 4ක් ගෙවනු ලබන සමාගමක, වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 20ක් වූ කොටස් ද මිල දී ගැනීමට යෙදවී ය. මෙම ආයෝජනයෙන් ඔහු වර්ෂයකට ලැබූ ආදායම රුපියල් 9500ක් වූයේ නම්, ඔහු එක් එක් සමාගමේ ආයෝජනය කළ මුදල් වෙන වෙන ම සොයන්න.

10. වාර්ෂික ලාභාංශ කොටසකට රුපියල් 5ක් ගෙවන සමාගමක කොටස් 4000ක් හිමි ව තිබූ ආයෝජකයකු, එම කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 45 වූ අවස්ථාවේ ඒවා විකුණා දැමී ය. කොටස් විකිණීමෙන් ලද මුදල සම්පූර්ණයෙන් ම වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 25ක් වූ වෙනත් සමාගමක කොටස් මිල දී ගත්තේ ය. එම ආයෝජනය නිසා ඔහුගේ ආදායම මුලින් ලැබූ ආදායමට වඩා රුපියල් 8800කින් වැඩි විය. දෙවන සමාගමේ කොටසක් සඳහා ගෙවන වාර්ෂික ලාභාංශය සොයන්න.

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. මල්කි තමා සතු ව තිබූ රුපියල් 50 000ක මුදලක් ස්ථාවර තැන්පතු සඳහා වර්ෂයකට 12%ක් ගෙවන මූල්‍ය ආයතනයක වර්ෂයක කාලයක් සඳහා තැන්පත් කළා ය. වර්ෂය අවසානයේ මූල්‍ය ආයතනයෙන් එම මුදල නිදහස් කර ගත් ඇය, අවුරුද්දට ලැබූ පොලියත් සමඟ මුළු මුදල ම වර්ෂයකට කොටසකට රුපියල් 4ක් ගෙවන, වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 28ක් වන සමාගමක ආයෝජනය කළා ය.

(i) මූල්‍ය ආයතනයේ ස්ථාවර තැන්පතුව සඳහා ලැබූ පොලිය සොයන්න.
(ii) කොටස් මිල දී ගැනීමට ආයෝජනය කළ මුදල සොයන්න.
(iii) ආයෝජනයෙන් ලැබූ වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම සොයන්න.
(iv) දෙවන වර්ෂය සඳහා වඩා වාසිදායක වන්නේ, පොලියත් සමඟ මුළු මුදල ම නැවත මූල්‍ය ආයතනයේ තැන්පත් කිරීම ද? සමාගමේ ආයෝජනය කිරීම දැයි හේතු සහිත ව දක්වන්න.

2. වාර්ෂික ලාභාංශ කොටසකට රුපියල් 2 බැගින් ගෙවන සමාගමක කොටස් 1 500ක් හිමි ආයෝජකයෙක්, එම කොටස් වර්ෂයක ආදායම ලැබීමෙන් පසු කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 32 වූ අවස්ථාවේ විකුණුවේ ය. කොටස් විකිණීමෙන් ලද මුදල, වාර්ෂික ලාභාංශ කොටසකට රුපියල් 2 බැගින් ගෙවන, වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 40ක් වූ සමාගමක කොටස් මිල දී ගැනීමට ආයෝජනය කළේ ය. පළමු සමාගමේ හා දෙවන සමාගමේ ආදායම අතර අනුපාතය 5 : 4 බව පෙන්වන්න.

3. උදේශ් 12% සුළු පොලියට රුපියල් 40 000ක් මූල්‍ය ආයතනයකින් ණයට ගනියි. ඔහු එම මුදල සම්පූර්ණයෙන් ම වාර්ෂික ව කොටසකට ලාභාංශ රුපියල් 4.50ක් ගෙවන සමාගමක කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 20 වූ කොටස් මිල දී ගැනීමට ආයෝජනය කළේ ය. වසර තුනකට පසු ඔහු සතු කොටස් සියල්ල එවකට පැවැති වෙළෙඳපොළ මිල වූ රුපියල් 28 බැගින් විකුණා දමා මූල්‍ය ආයතනයෙන් ලබා ගත් ණය මුදල පොලියත් සමඟ සම්පූර්ණයෙන් ගෙවා නිම කළේ ය. මෙම ගනුදෙනුව නිසා, උදේශ්ට රුපියල් 28 600ක ලාභයක් ලැබුණු බව පෙන්වන්න.

4. එක්තරා සමාගමක කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල රුපියල් 48ක් ව තිබිය දී උපුල් එම සමාගමේ මුදල් ආයෝජනය කළේ ය. වර්ෂ කිහිපයක් ආදායම ලැබීමෙන් පසු ඔහු, තමා සතු කොටස් 30%ක ප්‍රාග්ධන ලාභයක් ලැබෙන සේ කොටසක වෙළෙඳපොළ මිල ඉහළ නැගී අවස්ථාවක විකිණීමට අදහස් කරයි. ඔහුගේ අපේක්ෂාව සාර්ථක වීමට කොටසක් විකිණිය යුත්තේ කීයට ද?

11 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය

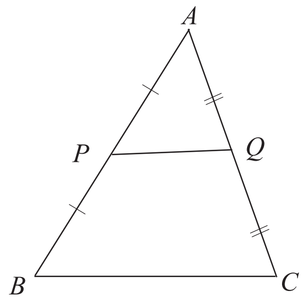
මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය හා එහි විලෝමය අවබෝධ කර ගැනීමට
- මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය හා විලෝමය භාවිතයෙන් විවිධ ගණනය කිරීමට හා අනුමේය සාධනය කිරීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

11.1 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය

ත්‍රිකෝණයක පාදවල දිග ආශ්‍රිත ප්‍රතිඵලයක්, මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයෙන් ලබා දෙයි. රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයෙහි AB පාදයෙහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය P ද AC පාදයෙහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Q ද ලෙස ගෙන ඇත.



එවිට,

$AP = PB$ ද $AQ = QC$ ද වේ. එය,

$AP = PB = \frac{1}{2}AB$ හා $AQ = QC = \frac{1}{2}AC$ ලෙස ද ලිවිය හැකි ය.

PQ රේඛා ඛණ්ඩයෙන් දැක්වෙන්නේ AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන රේඛා ඛණ්ඩය යි.

ප්‍රමේයය:
ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කරන රේඛාව ත්‍රිකෝණයෙහි ඉතිරි පාදයට සමාන්තර වන අතර, දිගින් එම පාදයෙන් හරි අඩක් වේ.

ඉහත රූපසටහනට අදාළ ව, ප්‍රමේයයට අනුව,

$PQ \,//\, BC$ හා

$PQ = \frac{1}{2}BC$ වේ.

මෙම ප්‍රමේයය ඒත්තු ගැනීම සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකමේ යෙදෙමු.

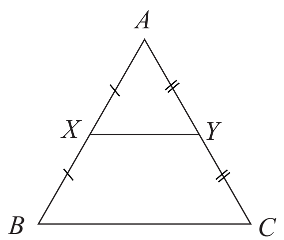
ක්‍රියාකාරකම 1

$AB = 6$ cm ද $BC = 7$ cm ද $CA = 8$ cm ද වන පරිදි ABC ත්‍රිකෝණය ඇඳ, AB හි හා AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P හා Q ලෙස නම් කරන්න.

(i) PQ හි දිග මැන, එය BC හි දිගෙන් හරි අඩක් බව තහවුරු කර ගන්න.
(ii) විහිත චතුරස්‍රය ආධාරයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ PQ හා BC සමාන්තර දැයි විමසා බලන්න.

ඉහත ක්‍රියාකාරකමට අනුව $PQ = \frac{1}{2}BC$ බව ද $PQ//BC$ බව ද ඔබට පෙනෙන්නට ඇත. මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය යොදා ගනිමින් ත්‍රිකෝණ ආශ්‍රිත ගණනය කිරීම් ඇතුළත් නිදසුනක් සලකා බලමු.

නිදසුන 1



රූපයේ දැක්වෙන්නේ පාදයක දිග 12 cm වූ ABC නම් සමපාද ත්‍රිකෝණයකි. AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් X හා Y වේ.

(i) XY හි දිග
(ii) $BCYX$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය

සොයන්න.

(i) මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයට අනුව

$XY//BC$ හා $XY = \frac{1}{2}BC$ වේ.

$$\therefore XY = \frac{1}{2} \times 12$$
$$= 6$$

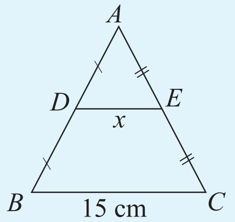
$\therefore XY$ හි දිග 6 cm වේ.

(ii) $BCYX$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය $= BC + CY + XY + XB$
$= 12 + 6 + 6 + 6$
$= 30$

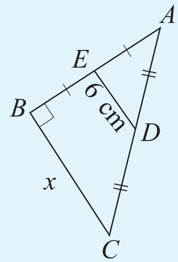
$\therefore BCYX$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය 30 cm වේ.

11.1 අභ්‍යාසය

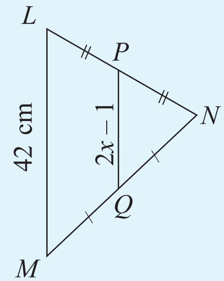
1. එක් එක් රූපයේ දැක්වෙන x හි අගය සොයන්න.



(i)

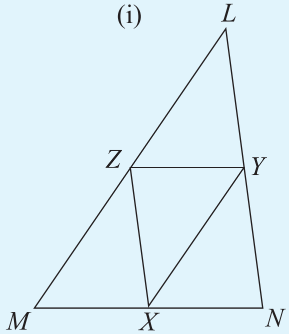


(ii)



(iii)

2. දී ඇති රූපයේ X, Y හා Z යනු MN, NL හා LM පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ. $MN = 8$ cm, $NL = 10$ cm හා $LM = 12$ cm නම්, XYZ ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය සොයන්න.

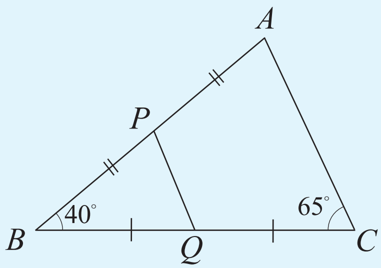


3. $ABCD$ චතුරස්‍රයේ AC හා BD විකර්ණ පිළිවෙළින් 15 cm හා 10 cm වේ. AB, BC, CD හා DA පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය සොයන්න.

4. රූපයේ දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන්

(i) $AB = 8$ cm ද $BC = 10$ cm ද ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය 24 cm ද වේ නම්, PBQ ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය සොයන්න.

(ii) $\hat{B} = 40^\circ$ ද $\hat{C} = 65^\circ$ ද නම් $PQCA$ චතුරස්‍රයේ ඉතිරි කෝණවල අගය සොයන්න.

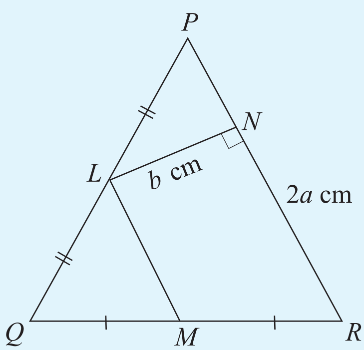


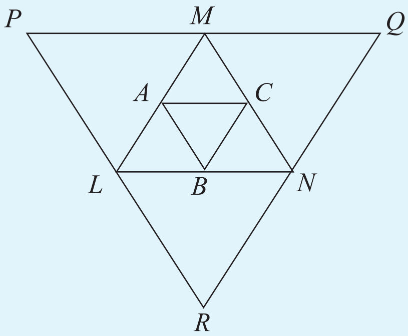
5. රූපයේ දැක්වෙන PQR ත්‍රිකෝණයේ QR හා QP පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් M හා L වේ. $QR + QP = 16$ cm ද $PR = 2a$ cm හා $LN = b$ cm ද $L\hat{N}R = 90^\circ$ බව ද දී ඇත.

(i) $LMRP$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය a ඇසුරෙන්

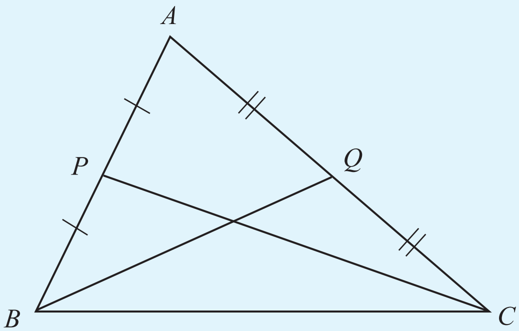
(ii) $LMRP$ හි වර්ගඵලය a හා b ඇසුරෙන්

සොයන්න.

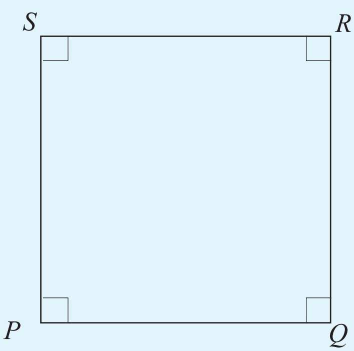


6. 

රූපයේ දැක්වෙන PQR ත්‍රිකෝණයේ පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වන M, N හා L යා කිරීමෙන් LMN ත්‍රිකෝණය ද එහි පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වන C, B, A යා කිරීමෙන් CBA ත්‍රිකෝණය ද ලබා ගෙන ඇත. PQR ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය 12 cm වේ නම්, ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය සොයන්න.

7. 

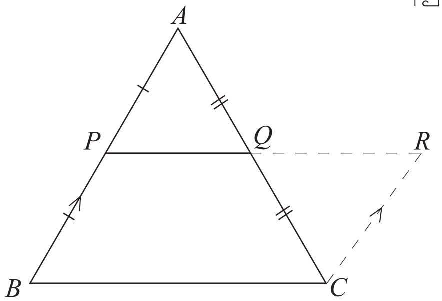
රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයේ AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P හා Q වේ නම් PBC හා BQC ත්‍රිකෝණවල වර්ගඵලය සමාන බව පෙන්වන්න.

8. 

රූපයේ දැක්වෙන $PQRS$ සමචතුරස්‍රයේ පරිමිතිය 60 cm වේ. එහි පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය සොයා, කරණි ආකාරයෙන් තබන්න.

11.2 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය සාධනය

මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය විධිමත් ව සාධනය කරන අයුරු දැන් විමසා බලමු.



දත්තය: ABC ත්‍රිකෝණයේ AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P සහ Q වේ.

සාධනය කළ යුත්ත: $PQ//BC$ බව හා

$PQ = \frac{1}{2}BC$ බව

නිර්මාණය: දික්කළ PQට R හි දී හමු වන සේ BPට සමාන්තර ව C හරහා රේඛාවක් ඇඳීම.

සාධනය: APQ සහ QCR ත්‍රිකෝණ දෙකේ

$AQ = QC$ (AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Q නිසා)

$A\hat{P}Q = Q\hat{R}C$ ($AP//RC$ නිසා ඒකාන්තර කෝණ)

$A\hat{Q}P = R\hat{Q}C$ (ප්‍රතිමුඛ කෝණ)

$\therefore APQ\,\Delta \equiv QCR\,\Delta$ (කෝ.කෝ.පා.)

$\therefore AP = RC$ සහ $PQ = QR$ (අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)

නමුත් $AP = PB$

$\therefore PB = RC$

මේ අනුව, $BCRP$ චතුරස්‍රයේ $PB = RC$ සහ $PB//RC$

$\therefore BCRP$ සමාන්තරාස්‍රයකි.

$\therefore PR = BC$ සහ $PR//BC$ වේ.

නමුත් $PQ = QR$

$\therefore PQ = \frac{1}{2}PR$

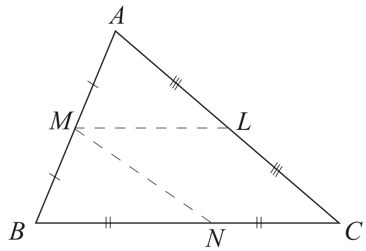
$= \frac{1}{2}BC$ ($PR = BC$ නිසා)

$\therefore PQ//BC$ සහ $PQ = \frac{1}{2}BC$ වේ.

මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් අනුමේයයන් සාධනය කරන අයුරු දැන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1

ABC ත්‍රිකෝණයේ *AB, BC* හා *CA* පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් *M, N* හා *L* වේ. *NCLM* සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



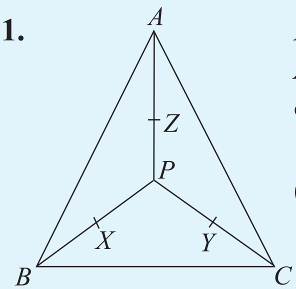
මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයට අනුව $ML = \frac{1}{2}BC$

$= NC$ (N යනු BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය නිසා)

$ML // BC$ වේ.

එමනිසා, *NCLM* චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ පාද යුගලක් සමාන හා සමාන්තර වේ. එමනිසා, *NCLM* යනු සමාන්තරාස්‍රයකි.

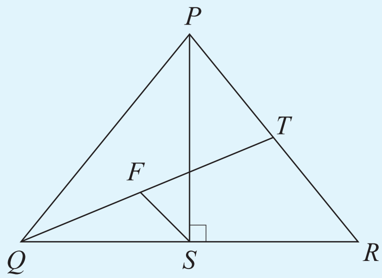
11.2 අභ්‍යාසය

1. 

P යනු *ABC* ත්‍රිකෝණයේ අභ්‍යන්තරයේ පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් වේ. *AP, BP* හා *CP* රේඛාවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් හා *Z, X* හා *Y* වේ.

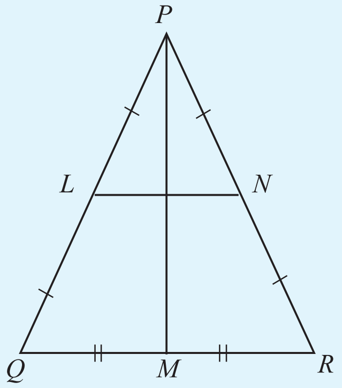
(i) $B\hat{A}C = X\hat{Z}Y$, $A\hat{C}B = Z\hat{Y}X$ හා $C\hat{B}A = Y\hat{X}Z$ බව පෙන්වන්න.

(ii) *ABC* ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය *XYZ* ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය මෙන් දෙගුණයක් බව පෙන්වන්න.

2. 

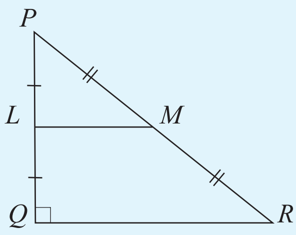
රූපයේ දැක්වෙන *PQR* ත්‍රිකෝණයේ $Q\hat{P}R$ කෝණයේ සමච්ඡේදකයට *QR* පාදය *S* හි දී හමු වන්නේ $PS \perp QR$ වන පරිදිය. *QT* හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය *F* වේ. $FS // TR$ බව පෙන්වන්න.

3.



රූපයේ දී ඇති තොරතුරු අනුව, $PM \perp LN$ බව පෙන්වන්න.

4.



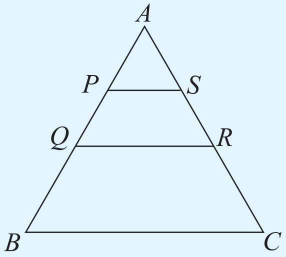
රූපයේ දී ඇති තොරතුරු අනුව,

(i) $PLM\,\Delta \equiv QLM\,\Delta$ බව

(ii) $LQRM$ හි වර්ගඵලය $= \dfrac{3}{4}\, PQR\,\Delta$ වර්ගඵලය බව

පෙන්වන්න.

5.



දී ඇති ABC ත්‍රිකෝණයේ AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් Q හා R වේ. AQ හා AR රේඛාවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P හා S වේ. $4\ PS = BC$ බව පෙන්වන්න.

6.

(i) ඕනෑ ම චතුරස්‍රයක පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන චතුරස්‍රය සමාන්තරාස්‍රයක් වන බව සාධනය කරන්න.

(ii) ඕනෑ ම ඍජුකෝණාස්‍රයක පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන චතුරස්‍රය රොම්බසයක් බව සාධනය කරන්න.

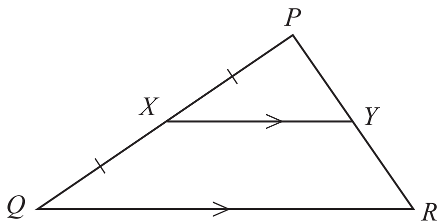
(iii) ඕනෑ ම සමචතුරස්‍රයක පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන චතුරස්‍රය සමචතුරස්‍රයක් වන බව සාධනය කරන්න.

(iv) ඕනෑ ම රොම්බසයක පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් සෑදෙන චතුරස්‍රය ඍජුකෝණාස්‍රයක් වන බව සාධනය කරන්න.

11.3 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමය

දැන් මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයෙහි විලෝමය පිළිබඳ ව විමසා බලමු.

ප්‍රමේයය:
ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා තවත් පාදයකට සමාන්තරව අඳින රේඛාවෙන් ඉතිරි පාදය සමච්ඡේදනය වේ.



රූපයේ දැක්වෙන PQR ත්‍රිකෝණයෙහි X යනු PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යි (එනම් $PX = XQ$ වේ). $XY // QR$ වන ලෙස XY ඇඳ ඇත. මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමයට අනුව Y යනු PR හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යි. එනම්,

$$PY = YR \text{ වේ.}$$

මෙම ප්‍රමේයය තහවුරු කර ගැනීම සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකමේ යෙදෙන්න.

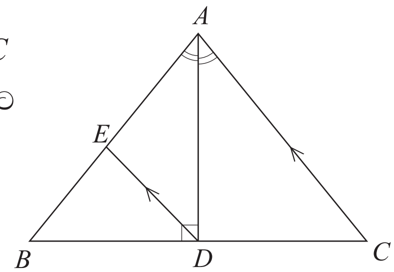
ක්‍රියාකාරකම 2

- $PQ = 5$ cm, $QR = 6$ cm හා $RP = 7$ cm වන පරිදි PQR ත්‍රිකෝණය අඳින්න.
- PQ පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X ලෙස ලකුණු කරන්න.
- X හරහා QRට සමාන්තර ව රේඛාවක් ඇඳ එම රේඛාව PR පාදය හමු වන ලක්ෂ්‍යය Y ලෙස නම් කරන්න.
- PY හා YR දිග මැන PY හා YR දිග අතර ඇති සම්බන්ධය ලියන්න.
- මෙලෙස X හරහා PR පාදයට සමාන්තර ව රේඛාවක් ඇඳ එම රේඛාව QR පාදය ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යය Z ලෙස නම් කරන්න. QZ හා ZR දිග මනින්න.

ඉහත ක්‍රියාකාරකමට අනුව $PY = YR$ ද $QZ = ZR$ ද බව ඔබට පෙනෙන්නට ඇත. එනම් ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා තවත් පාදයකට සමාන්තර ව අඳින රේඛාවෙන් තුන්වන පාදය සමච්ඡේද වන බව ඔබට තහවුරු වන්නට ඇත.

දැන් මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමයේ යෙදීම් කිහිපයක් නිදසුන් ඇසුරෙන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1



ABC ත්‍රිකෝණයේ $B\hat{A}C$ කෝණයේ සමච්ඡේදකයට BC පාදය D හි දී හමු වේ. $A\hat{D}B = 90^\circ$ වේ. D හරහා CAට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාව AB පාදය E හි දී හමු වේ.

(i) $ADB\,\Delta \equiv ADC\,\Delta$ බව

(ii) $BE = EA$ බව

පෙන්වන්න.

(i) ADB සහ ADC ත්‍රිකෝණවල

$B\hat{A}D = C\hat{A}D$ ($B\hat{A}C$ හි සමච්ඡේදකය AD නිසා)

AD පොදු පාදය වේ.

$A\hat{D}B = A\hat{D}C$ ($AD \perp BC$)

$\therefore\ ABD\,\Delta \equiv ADC\,\Delta$ (කෝ.කෝ.පා)

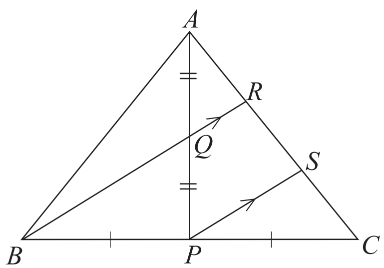
(ii) $BD = DC$ (ADB හා ADC අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)

$BD = DC$ හා $AC \,//\, DE$ බැවින්

මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමයට අනුව BAC ත්‍රිකෝණයෙහි

$\underline{\underline{BE = EA}}$

නිදසුන 2



රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයේ BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය P ද AP රේඛාවේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Q ද වේ. දික්කළ BQ රේඛාවට AC පාදය R හි දී හමු වේ. BRට සමාන්තර ව P හරහා ඇඳි රේඛාවට AC පාදය S හි දී හමු වේ. $AC = 15$ cm වේ නම්, AS දිග සොයන්න.

APS ත්‍රිකෝණයේ $AQ = QP$ ද $QR//PS$ වේ.

එමනිසා, මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමයට අනුව

$AR = RS$ ——— ①

BRC ත්‍රිකෝණයේ $BP = PC$ ද $BR//PS$ ද වේ.

එමනිසා, මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමයට අනුව

$RS = SC$ ——— ②

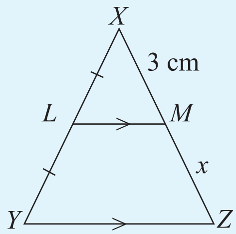
① හා ② ට අනුව $AR = RS = SC$ වේ.

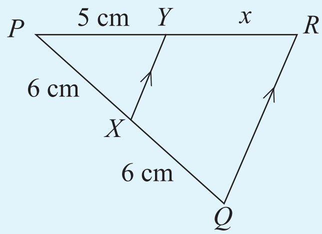
$$\therefore\ AS = \frac{2}{3}AC$$
$$= \frac{2}{3} \times 15$$
$$= 10$$

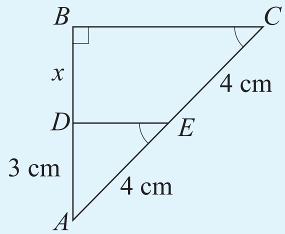
එමනිසා, AS හි දිග 10 cm වේ.

11.3 අභ්‍යාසය

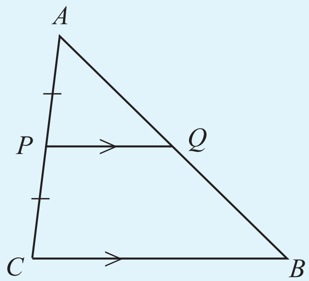
1. එක් එක් රූපයේ දැක්වෙන x හි අගය සොයන්න.





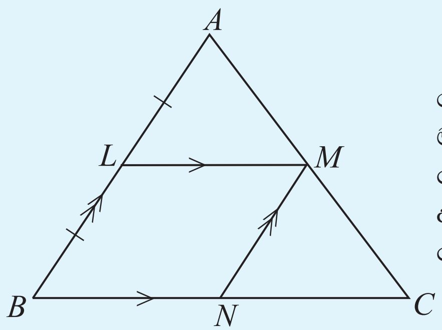


2.



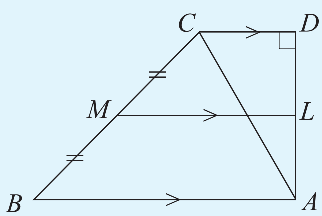
AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය P ද $BC = 12$ cm, $AB = 15$ cm ද $PQ//CB$ ද වේ නම්,
(i) QB දිග
(ii) PQ දිග
සොයන්න.

3.



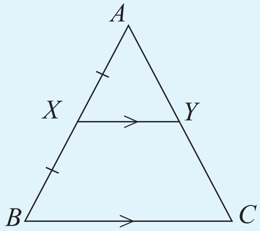
රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයේ AB පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය L වන අතර $LM//BC$ ද $MN//AB$ ද වේ. $AB = 10$ cm ද $AM = 7$ cm ද $BC = 12$ cm ද නම් MC දිග හා $BNML$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය සොයන්න.

4.



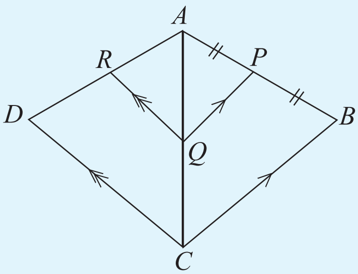
රූප සටහනෙහි දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් $AC = 10$ cm හා $AD = 8$ cm නම්
(i) DC දිගත්
(ii) $ML = 10$ cm නම් $ABCD$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලයත්
සොයන්න.

5.



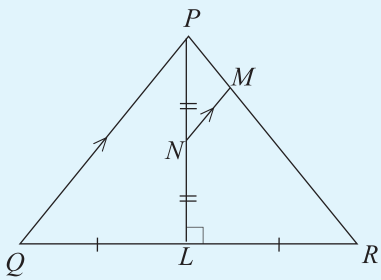
රූපයේ දැක්වෙන ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය 30 cm වේ. දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් $BCYX$ ත්‍රපීසියමේ පරිමිතිය සොයන්න.

6.



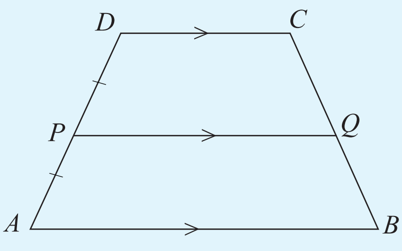
රූපයේ දැක්වෙන ABC හා ADC ත්‍රිකෝණ, සමපාද ත්‍රිකෝණ වන අතර AB = 20 cm වේ. දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් $PQRDCB$ කොටසේ පරිමිතිය සොයන්න.

7.



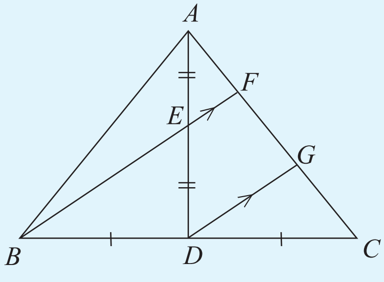
රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු ඇසුරෙන් PQ = 20 cm නම් MN දිග සොයන්න.

8.



රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු ඇසුරෙන් PQ හි දිග AB හා DC හි දිග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

9.

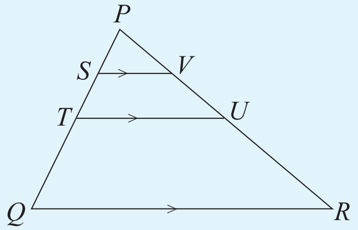


රූපයේ දැක්වෙන ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයේ පාදයක දිග x cm ද $EF = y$ cm ද ලෙස ගෙන ලකුණු කර ඇති තොරතුරු අනුව

(i) $EDGF$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය
(ii) $BDGF$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය
(iii) $BDGA$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය

x හා y ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

10.

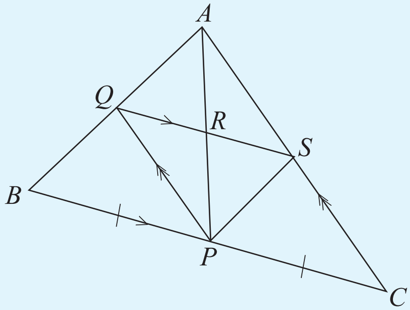


දී ඇති රූපයේ PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය T ද PT හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය S ද වේ. S හා T හරහා QRට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛා PR පාද පිළිවෙළින් V හා U හි දී හමු වේ.

(i) $PV = \frac{1}{4} PR$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $SV : QR$ සොයන්න.

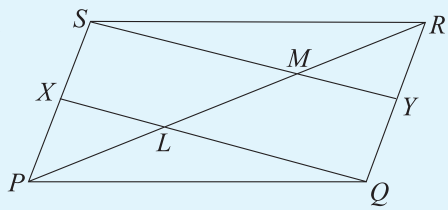
11.



රූපයේ දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් $AR = RP$ බවත් $PS // BQ$ බවත් පෙන්වන්න.

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1.



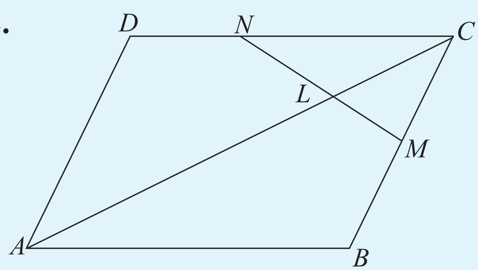
$PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ PS හා QR පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයන් පිළිවෙළින් X හා Y වේ. XQ හා SY රේඛා පිළිවෙළින් L හා M හි දී PR විකර්ණය හමු වේ.

(i) $XQYS$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව

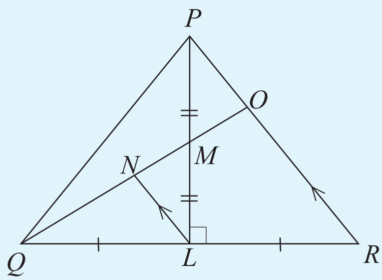
(ii) $PM = \frac{2}{3} PR$ බව

සාධනය කරන්න.

2.



$ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ BC හා CD පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් M හා N වේ. $LC = \frac{1}{4} AC$ බව පෙන්වන්න.

3. 

රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු ඇසුරෙන්

(i) $QN = NO$ බව
(ii) $POM\,\Delta \equiv NLM\,\Delta$ බව
(iii) $PNLO$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව
(iv) $MO = \frac{1}{4}\,QO$ බව

පෙන්වන්න.

4. $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයක් වේ. එහි විකර්ණ O හි දී ඡේදනය වේ. PQ පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය L වන අතර LO රේඛාවේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය T වේ. දික්කල PT රේඛාව හා QR රේඛාව Y හි දී හමු වේ.

(i) $PT = TY$ බව
(ii) $PLYO$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව
(iii) $4\,LT = QR$ බව

පෙන්වන්න.

5. PQR ත්‍රිකෝණයේ PR හා PQ පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයන් පිළිවෙළින් X හා Y වේ. QX හා YR රේඛා L හි දී එකිනෙක ඡේදනය වේ. Q හරහා YRට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාව දික්කල PL පාදය M හි දී හමු වේ. LM හා QR රේඛා N හි දී ඡේදනය වේ.

(i) $PL = LM$ බව පෙන්වන්න.
(ii) $MR // QX$ බව පෙන්වන්න.
(iii) $QMRL$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.
(iv) $\dfrac{PL}{PN}$ හි අගය සොයන්න.

12 ප්‍රස්තාර

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,
- සමගාමී සමීකරණ යුගලයක විසඳුම් ප්‍රස්තාර ඇසුරෙන් ලබා ගැනීමට
- $y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයේ වර්ගජ ශ්‍රිතවල ප්‍රස්තාර ඇඳීමට
- ප්‍රස්තාර ඇසුරෙන් ශ්‍රිතයේ හැසිරීම විග්‍රහ කිරීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

ඔබ මීට පෙර සරල රේඛාව සම්බන්ධ ව කළ හැදෑරීම්වල දී සරල රේඛීය ප්‍රස්තාර ඇඳීම පිළිබඳ උගත් විෂය කරුණු නැවත මතක් කර ගැනීම සඳහා පහත අභ්‍යාසයේ නිරත වන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

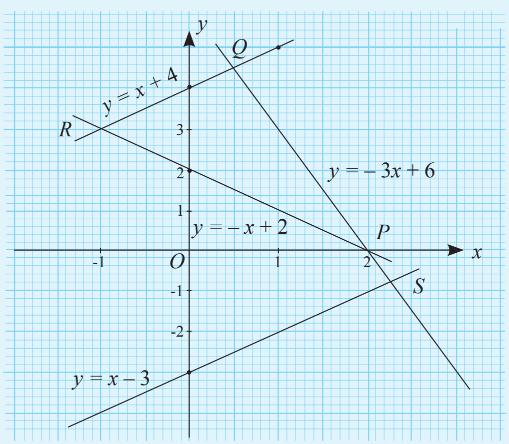
1. ***a.*** x සඳහා තෝරා ගත් අගයන් තුනකට අනුරූප y හි අගයන් ගණනය කර පහත දැක්වෙන එක් එක් සරල රේඛාව එක ම ඛණ්ඩාංක තලයේ ඇඳ දක්වන්න.
(i) $y = x + 1$ (ii) $y - x = 5$ (iii) $2y = -x - 4$ (iv) $3x + 2y = 6$

b. ඉහත ඇඳිනු ලැබූ එක් එක් සරල රේඛාවට අක්ෂ හමු වන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වන්න.

2. පහත දැක්වෙන එක් එක් සරල රේඛාව ඉදිරියෙන් දක්වා ඇති ඛණ්ඩාංක අතුරින් කුමන ඛණ්ඩාංක අදාළ සරල රේඛාව මත පිහිටන්නේ ද යන්න තෝරා දක්වන්න.

(i) $y = 2x - 3$; (1, 1), (0, 3), (2, 1) (ii) $y = 2x - 3$; $(0, -3)$, $(\frac{1}{2}, 4)$, (1, 3)

3. ඛණ්ඩාංක තලයක ඇඳිනු ලැබූ සරල රේඛා හතරක සටහනක් මෙහි දැක්වේ. රේඛා එකිනෙක ඡේදනය වන P, Q, R හා S ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක, දී ඇති ඛණ්ඩාංක යුගල 7 අතුරින් තෝරන්න. ඔබේ පිළිතුරු සඳහා හේතු දක්වන්න.



$(-3, 5)$, $(-1, 3)$, $(-1, -3)$

$(\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$, $(2, 0)$, $(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$,

$(2\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$

12.1 සමගාමී සමීකරණ යුගලයක විසඳුම් ප්‍රස්තාර ඇසුරෙන් සෙවීම

සමගාමී සමීකරණ යුගලයක විසඳුම් සොයන ආකාරය මීට ඉහත ශ්‍රේණිවල දී ඔබ උගෙන ඇත. එහි දී එම සමීකරණ විසඳනු ලැබුවේ වීජීය ක්‍රම ඇසුරෙනි. එහෙත් මෙහි දී අපගේ අවධානය යොමු වන්නේ වීජීය ක්‍රම භාවිත නොකොට පහත විස්තර කෙරෙන අයුරින් සමගාමී සමීකරණ යුගලය ප්‍රස්තාරික ව නිරූපණය කර විසඳුම් ලබා ගන්නේ කෙසේ ද යන්න පිළිබඳ ව යි.

මෙහි දැක්වෙන සමගාමී සමීකරණ යුගලය පිළිබඳ අවධානය යොමු කරන්න.

$$y - x = -3$$
$$y + 3x = 5$$

ප්‍රථමයෙන් වීජීය ක්‍රමයට මෙම සමගාමී සමීකරණ යුගලය විසඳමු.

$$y - x = -3 \text{ ——— } ①$$
$$y + 3x = 5 \text{ ——— } ②$$

② – ① න් $(y + 3x) - (y - x) = 5 - (-3)$

$$\therefore\ y + 3x - y + x = 5 + 3$$
$$\therefore\ 4x = 8$$
$$\therefore\ x = 2$$

$x = 2$ ① හි ආදේශයෙන්

$$y - 2 = -3$$
$$\therefore\ y = -3 + 2$$
$$\therefore\ y = -1$$

$\therefore$ විසඳුම

$\underline{\underline{x = 2 \text{ හා } y = -1}}$

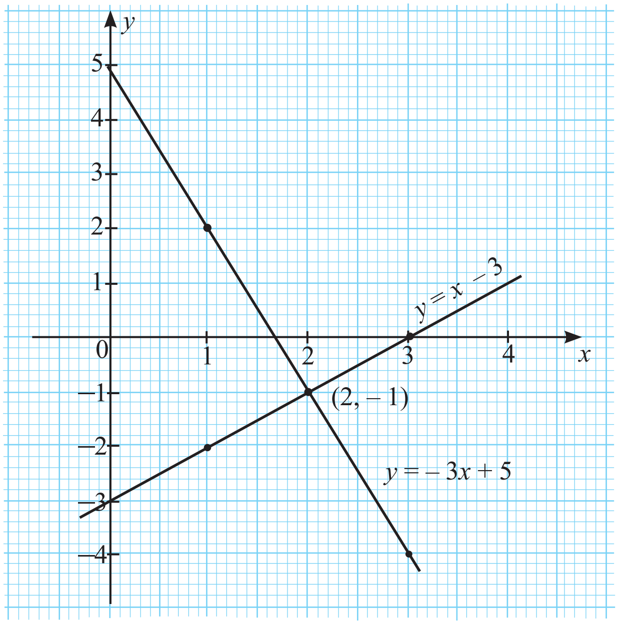
මෙම සමීකරණ යුගලය සැලකිල්ලට ගත් විට $y = x - 3$ හා $y = -3x + 5$ ආකාරයෙන් සරල රේඛා දෙකක සමීකරණ ලෙස, y උක්ත කොට ලියා දැක්විය හැකි ය. මුලින් ම, මෙම සමීකරණවලින් දැක්වෙන සරල රේඛා දෙක එක ම බණ්ඩාංක තලයක අඳිමු. ඒ සඳහා සූදානම් කළ වගු දෙකක් පහත දැක්වේ.

$y = x - 3$

x	1	2	3
y	-2	-1	0

$y = -3x + 5$

x	1	2	3
y	2	-1	-4



එක ම බණ්ඩාංක තලයක ඉහත ලක්ෂ්‍ය ලකුණු කළ පසු ලැබෙන සරල රේඛා යුගලය $(2, -1)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී එකිනෙක ඡේදනය වේ. මෙම ලක්ෂ්‍යයේ x හා y අගයන් ඉහත සමීකරණ යුගලයට ආදේශ කළ විට සමීකරණ යුගලයේ දෙපස ම සමාන වන බව නිරීක්ෂණය කළ හැකි ය. එනම්, මෙම ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ බණ්ඩාංක වන $x = 2$ හා $y = -1$ යන අගය ඉහත සමගාමී සමීකරණ යුගලයේ විසඳුම බව පැහැදිලි වේ.

ඉහත සමීකරණ යුගලය වීජීය ක්‍රමය භාවිතයෙන් විසඳීමෙන් ලැබුණු පිළිතුර හා සමාන වීම නිසා තවදුරටත් සමීකරණ යුගලයේ ජ්‍යාමිතික විසඳුම තහවුරු වේ.

මේ අනුව, සමගාමී සමීකරණ දෙකක විසඳුම, ජ්‍යාමිතික ව සෙවීම සඳහා කළ යුත්තේ, එම සමීකරණ සහිත සරල රේඛා යුගලය බණ්ඩාංක තලයක ඇඳ, ඒවායේ ඡේදන ලක්ෂයේ බණ්ඩාංක සෙවීම යි. x – බණ්ඩාංකය මගින් x හි අගයත්, y – බණ්ඩාංකය මගින් y හි අගයත් විසඳුම ලෙස එවිට ලැබේ.

පහත නිදසුනේ, සමගාමී සමීකරණ යුගලක් ගොඩනගා ඒවා ජ්‍යාමිතික ව විසඳන අයුරු විමසා බැලෙයි.

නිදසුන 1

පුද්ගලයෙක් තැපැල්හලකින් වටිනාකම රුපියල් 10 හා රුපියල් 20 වූ මුද්දර 10ක් මිල දී ගත්තේ ය. මිල දී ගත් මුද්දරවල මුළු වටිනාකම රුපියල් 120ක් වේ.

(i) මිල දී ගත් රුපියල් 10 මුද්දර ගණන x ලෙස ද රුපියල් 20 මුද්දර ගණන y ලෙස ද ගෙන සමගාමී සමීකරණ යුගලයක් ගොඩනගන්න.

(ii) ඉහත සමීකරණ යුගලය ප්‍රස්තාරික ක්‍රමය භාවිතයෙන් විසඳා, මිල දී ගත් රුපියල් 10 හා රුපියල් 20 මුද්දර ප්‍රමාණ වෙන වෙන ම සොයන්න.

අදාළ සමගාමී සමීකරණ යුගලය පහත ආකාරයට ගොඩනගා ගත හැකි වේ.

$$x + y = 10 \quad \text{———} \ (1)$$
$$10x + 20y = 120 \quad \text{———} \ (2)$$

ඉහත එක් එක් සමීකරණය ප්‍රස්තාරික ව නිරූපණය කරමු.

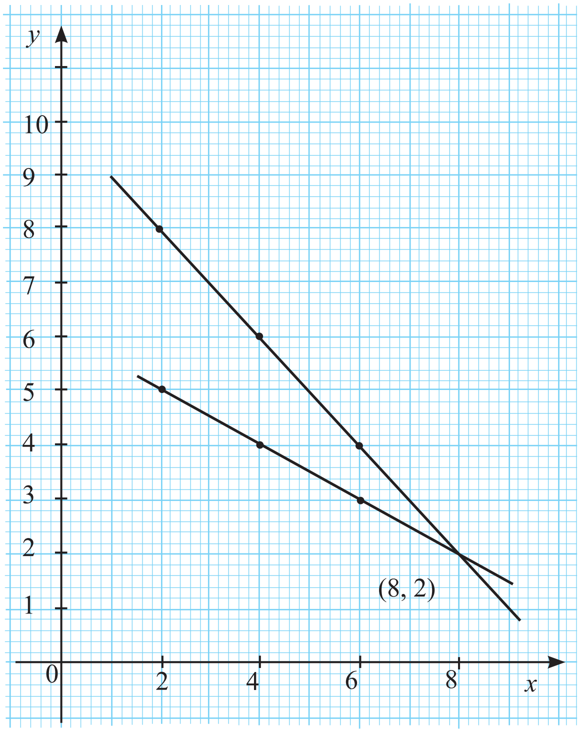
$x + y = 10$ එනම්, $y = -x + 10$

x	2	4	6
y	8	6	4

$10x + 20y = 120$ එනම්, $y = -\frac{1}{2}x + 6$

x	2	4	6
y	5	4	3

මෙවිට, පහත ආකාරයේ රේඛා යුගලක් ලැබේ.



$x + y = 10$ හා $10x + 20y = 120$ මගින් නිරූපිත සමීකරණ යුගලය ප්‍රස්තාරික ව නිරූපණය කළ විට $(8, 2)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී එකිනෙක ඡේදනය වේ. එවිට අදාළ සමීකරණ යුගලයේ විසඳුම $x = 8$ හා $y = 2$ වේ. එනම් පුද්ගලයා මිල දී ගත් රුපියල් 10 මුද්දර ප්‍රමාණය 8ක් ද රුපියල් 20 මුද්දර ප්‍රමාණය 2ක් ද වේ.

12.1 අභ්‍යාසය

1. පහත එක් එක් සමගාමී සමීකරණ යුගලය ප්‍රස්තාරික ක්‍රමය භාවිතයෙන් විසඳන්න. වීජීය ක්‍රමය භාවිතයෙන් ද එම සමීකරණ විසඳා පිළිතුරු තහවුරු කරන්න.

a. $y - x = 4$
$y - 2x = 3$

b. $y = -2x - 2$
$-2y = -x - 6$

c. $3x - 4y = 7$
$5x + 2y = 3$

2. එක්තරා පාසලක 11 වන ශ්‍රේණියේ A හා B පන්ති දෙකක් ඇත. A පන්තියේ ළමුන් පහක් B පන්තියට ගිය විට A පන්තියේ මෙන් දෙගුණයක් B පන්තියේ සිටී. B පන්තියෙන් ළමුන් පහක් A පන්තියට ගිය විට පන්ති දෙකේ ම ළමුන් ගණන සමාන වේ.

(i) A පන්තියේ ළමුන් ගණන x ලෙස ද B පන්තියේ ළමුන් ගණන y ලෙස ද ගෙන සමගාමී සමීකරණ යුගලයක් ගොඩනගන්න.

(ii) ඉහත සමීකරණ යුගලය එකම බණ්ඩාංක තලයක ඇඳ දක්වා ඒ ඇසුරෙන් පන්ති දෙකෙහි සිටි ළමුන් සංඛ්‍යාව වෙනවෙනම සොයන්න.

වර්ගජ ශ්‍රිතවල ප්‍රස්තාර

$y = ax^2$ හා $y = ax^2 + b$ ආකාරයේ වර්ගජ ශ්‍රිතවල ප්‍රස්තාර සම්බන්ධයෙන් මීට පෙර උගත් කරුණු නැවත මතකයට නගා ගැනීම සඳහා පහත දී ඇති අභ්‍යාසයෙහි නිරත වන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. $y = x^2 - 5$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීම සඳහා ලබා ගත් x හා y හි අගය ඇතුළත් අසම්පූර්ණ අගය වගුවක් පහත දැක්වේ.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	4	___	-4	-5	___	-1	4

a. (i) ඉහත වගුවේ හිස්තැන් පුරවන්න.
(ii) සුදුසු පරිමාණයක් භාවිත කර, ඉහත ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

b. අඳින ලද ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්
(i) ශ්‍රිතයේ අවම අගය
(ii) ප්‍රස්තාරයේ අවම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක
(iii) ශ්‍රිතයේ අගය ඍණ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
(iv) ශ්‍රිතය ධන ව වැඩි වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
(v) $y = -1$ විට x හි අගය
සොයන්න.

2. (i) $y = -2x^2 + 4$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීම සඳහා පහත දැක්වෙන අසම්පූර්ණ අගය වගුවේ හිස්තැන සම්පූර්ණ කරන්න.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-14	___	2	4	2	-4	-14

(ii) සුදුසු පරිමාණයක් භාවිත කර, ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.
අඳින ලද ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්
(iii) ශ්‍රිතයේ හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ (වර්තන ලක්ෂ්‍යයේ) ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වන්න.
(iv) ශ්‍රිතයේ අගය ශූන්‍ය වන x හි අගයන් ලබා ගන්න.
(v) ශ්‍රිතය ඍණ ව අඩු වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය ලියා දක්වන්න.
(vi) $y \leq 2$ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය සොයන්න.
(vii) $\sqrt{2}$ හි අගය දශමස්ථාන 1කට නිමානය කරන්න.

3. වගුවේ දැක්වෙන එක් එක් ශ්‍රිතය මගින් දැක්වෙන ප්‍රස්තාරය ඇඳීමෙන් තොර ව, වගුව සම්පූර්ණ කරන්න.

ශ්‍රිතය	හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ස්වභාවය (උපරිම/අවම)	සමමිති රේඛාවේ සමීකරණය	උපරිම/අවම අගය	හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක
(i) $y = 2x^2$	....	....	....	....
(ii) $y = \frac{1}{2}x^2$	....	....	....	....
(iii) $y = x^2 + 3$	....	....	....	....
(iv) $y = 1 - 2x^2$	උපරිම	$x = 0$	1	(0, 1)
(v) $y = -3x^2 - 4$	....	....	....	....
(vi) $y = \frac{3}{2}x^2 - 2$	....	....	....	....

12.2 $y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයේ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාරය

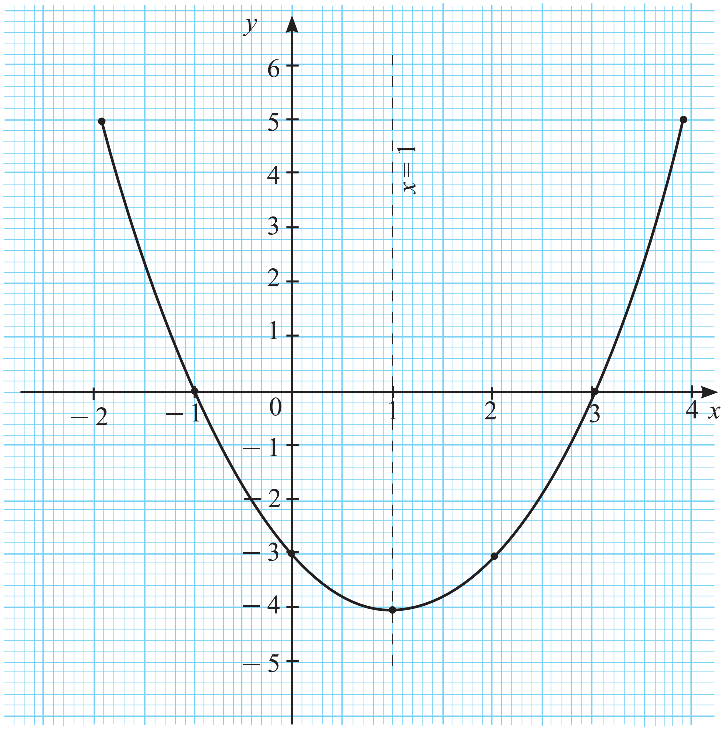
$y = ax^2 + b$ ආකාරයේ වර්ගජ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාර සම්බන්ධ ව මීට පෙර උගෙන ඇති ලක්ෂණවල දැනුම භාවිත කර, $y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයේ වර්ගජ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාර පිළිබඳ ලක්ෂණ හැදෑරීම සඳහා මුලින් ම අවධානය යොමු කරමු.

$a > 0$ විට $y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයේ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාරය ඇඳීම හා එහි ලක්ෂණ හඳුනා ගැනීම

මූලික ලක්ෂණ කිහිපයක් හඳුනා ගැනීම සඳහා ප්‍රථමයෙන් $y = x^2 - 2x - 3$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳිමු. ඒ සඳහා $-2 \leq x \leq 4$ පරාසය තුළ y හි අගයන් ලබා ගැනීම සඳහා අගය වගුවක් පහත ආකාරයට පිළියෙල කරමු.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	4	1	0	1	4	9	16
$-2x$	4	2	0	-2	-4	-6	-8
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
y	5	0	-3	-4	-3	0	5
(x, y)	$(-2, 5)$	$(-1, 0)$	$(0, -3)$	$(1, -4)$	$(2, -3)$	$(3, 0)$	$(4, 5)$

ඉහත ප්‍රස්තාරය ඇඳීමට පෙර x හා y හි අගයයන්ගේ පරාසය පිළිබඳ ව අවබෝධයක් ලබා ගෙන ඒ අනුව x අක්ෂය දිගේ කුඩා බෙදුම් 10කින් ඒකක එකක් ද, y අක්ෂය දිගේ කුඩා බෙදුම් 10කින් ඒකක දෙකක් ද දැක්වෙන සේ පරිමාණය ගෙන ඛණ්ඩාංක තලය පිළියෙල කොට $y = x^2 - 2x - 3$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීම පහසු වේ.



$y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයේ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාරයට පරාවලයක් යැයි කියනු ලැබේ.
අඳිනු ලැබූ ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන් පහත ලක්ෂණ නිරීක්ෂණය කළ හැකි ය.

- ප්‍රස්තාරය $x = 1$ රේඛාව වටා සමමිතික වේ. ඒ අනුව ප්‍රස්තාරයේ සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය $x = 1$ වේ.

ප්‍රස්තාරයේ x හි අගය -2 සිට ක්‍රමයෙන් වැඩි වන විට ඊට අනුරූප y හි අගය ක්‍රමයෙන් අඩු වී අවම අගය වන -4 ලැබුණු පසු නැවත වැඩි වේ.

ඉහත ප්‍රස්තාරයේ x හි අගය පරාසය තුළ y හි හැසිරීම තවදුරටත් විස්තරාත්මක ව පැහැදිලි කර ගනිමු.

- x හි අගය -2 සිට -1 දක්වා වැඩි වන විට y හි අගය හෙවත් ශ්‍රිතයේ අගය 5 සිට 0 (ශුන්‍යය) දක්වා ධන ව අඩු වේ. මෙහි "ධන ව අඩු වේ" යන්නෙහි තේරුම, ශ්‍රිතයේ අගය ධන අගයක් ව පවතිමින් අඩු වන බවයි.
- x හි අගය -1 වන විට ශ්‍රිතයේ අගය ශුන්‍ය වේ.
- x හි අගය -1 සිට 1 දක්වා වැඩි වන විට ඊට අනුරූප ව y හි අගය 0 සිට -4 තෙක් ඍණ ව අඩු වේ.
- x හි අගය 1 සිට 3 දක්වා වැඩි වන විට ඊට අනුරූප ව y හි -4 සිට 0 තෙක් ඍණ ව වැඩි වේ.
- x හි අගය 3 වන විට y හි අගය ශුන්‍ය වේ.
- x හි අගය 3හි සිට වැඩි වන විට y හි අගය 0 සිට ධන ව වැඩි වේ.

ඉහත ලක්ෂණ සැලකීමෙන්,

- ශ්‍රිතය ඍණ වන x හි අගය පරාසය අසමානතා ඇසුරෙන් $-1 < x < 3$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කළ හැකි ය.

- x හි අගය -1ට වඩා අඩු හෝ x හි අගය 3ට වඩා වැඩි වන විට y හි අගය ධන වේ. එනම්, ශ්‍රිතය ධන වන x හි අගය පරාස $x < -1$ හා $x > 3$ වේ.

මීට අමතර ව පහත කරුණු ගැන අවධානය යොමු කරන්න.

- මෙම ඇඳ ඇති ප්‍රස්තාරයත්, දී ඇති $y = x^2 - 2x - 3$ ශ්‍රිතයත් අතර ඇති සම්බන්ධය තේරුම් ගැනීම ඉතා වැදගත් ය. එය මෙසේ විස්තර කළ හැකි ය.
  1. ප්‍රස්තාරය මත ඕනෑ ම (a, b) ලක්ෂ්‍යයක් ගත හොත්, $y = x^2 - 2x - 3$ සමීකරණය $x = a$ හා $y = b$ මගින් තෘප්ත වේ. එනම්, $b = a^2 - 2a - 3$ සමීකරණය සත්‍ය වේ.
  2. විලෝම වශයෙන්, යම් (a, b) ඛණ්ඩාංකය මගින් $y = x^2 - 2x - 3$ සමීකරණය තෘප්ත වේ නම් එවිට (a, b) ලක්ෂ්‍යය ප්‍රස්තාරය මත පිහිටයි.

මෙම අවශ්‍යතා දෙක නිතර සිහි තබා ගැනීම ඉතා වැදගත් ය. $(-1, 0)$ ලක්ෂ්‍යය ප්‍රස්තාරය මත පිහිටන බව පෙනේ. එමනිසා $y = x^2 - 2x - 3$ සමීකරණය $x = -1$ හා $y = 0$ මගින් තෘප්ත විය යුතු ය. එනම්, $0 = (-1)^2 - 2(-1) - 3$ විය යුතු ය. එය මෙසේ වන බව සුළු කිරීමෙන් පෙනේ. වෙනත් අයුරකින් පැවසුව හොත්, $x = -1$ යන්න $x^2 - 2x - 3 = 0$ සමීකරණයේ මූලයක් වේ. මෙවැනි තර්කනයකින් $x = 3$ ද මෙම සමීකරණයේ මූලයක් වන බව කිව හැකි ය. තවත් අයුරකින් පැවසුව හොත්, $x^2 - 2x - 3 = 0$ සමීකරණයේ මූල වන්නේ $y = x^2 - 2x - 3$ ප්‍රස්තාරය x – අක්ෂය කපන ලක්ෂ්‍යවල x ඛණ්ඩාංක යි. මෙය වඩාත් සාධාරණ ලෙස මෙසේ ද ලියා දැක්විය හැකි ය. $y = ax^2 + bx + c$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය x – අක්ෂය කපන ලක්ෂ්‍යවල x – ඛණ්ඩාංක වන්නේ $ax^2 + bx + c = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල වේ.

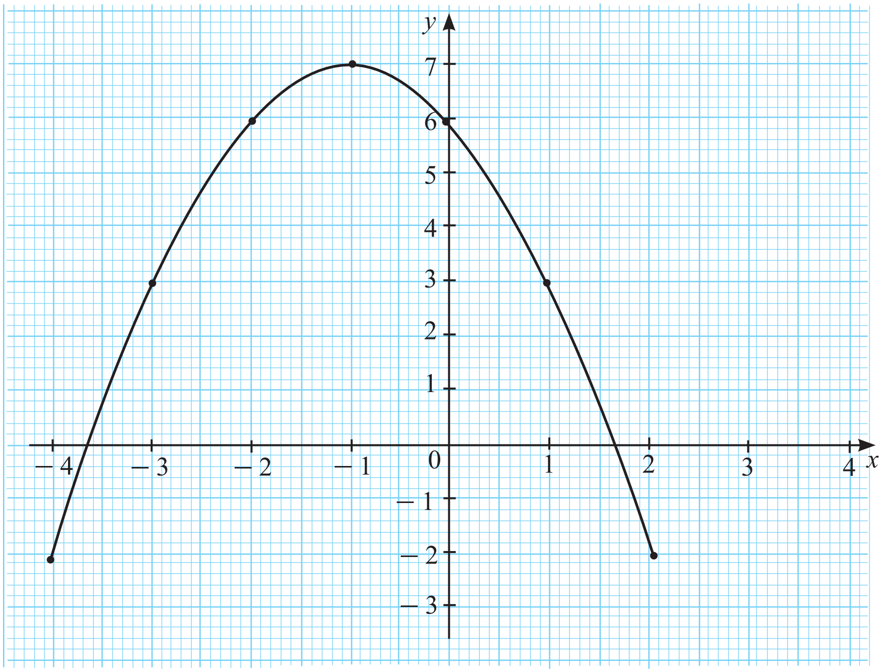
- ඉහත ප්‍රස්තාරයේ හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ දී ශ්‍රිතයේ අවම අගය ලැබේ. අවම අගය -4 වේ. හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $(1, -4)$ වේ.

$a < 0$ විට $y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයේ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාරය ඇඳීම හා එහි ලක්ෂණ හඳුනා ගැනීම

$y = -x^2 - 2x + 6$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීම සඳහා පහත දැක්වෙන පරිදි $-4 \leq x \leq 2$ පරාසය තුළ අගය වගුවක් සකස් කරමු.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$-x^2$	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4
$-2x$	8	6	4	2	0	-2	-4
$+6$	$+6$	$+6$	$+6$	$+6$	$+6$	$+6$	$+6$
y	-2	3	6	7	6	3	-2
(x, y)	$(-4, -2)$	$(-3, 3)$	$(-2, 6)$	$(-1, 7)$	$(0, 6)$	$(1, 3)$	$(2, -2)$

x හා y හි අගය පරාසය පිළිබඳ සලකා, x අක්ෂය ඔස්සේ කුඩා බෙදුම් දහයකින් ඒකක එකක් ද y අක්ෂය ඔස්සේ කුඩා බෙදුම් 10කින් ඒකක දෙකක් ද නිරූපණය වන පරිදි පරිමාණය තෝරා ගෙන, පහත දැක්වෙන ආකාරයට ප්‍රස්තාරය ඇඳිය හැකි වේ.



ඉහත ප්‍රස්තාරය නිරීක්ෂණයෙන් පහත කරුණු හඳුනා ගත හැකි වේ.

- උපරිම අගය 7 වන අතර ප්‍රස්තාරය $x = -1$ රේඛාව වටා සමමිතික වේ. ඒ අනුව ප්‍රස්තාරයේ සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය $x = -1$ වේ.
- හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $(-1, 7)$ වේ.
- x හි අගය -4 සිට -3.6 දක්වා වැඩි වන විට y හි අගය ඍණ ව වැඩි වේ.
- $x = -3.6$ දී ශ්‍රිතයේ අගය ශූන්‍ය වේ.
- x හි අගය -3.6 සිට -1 දක්වා වැඩි වන විට y හි අගය 0 සිට 7 දක්වා ධන ව වැඩි වේ.
- x හි අගය -1 දී ශ්‍රිතය $+7$ වූ උපරිම අගය ලබා ගනී.
- x හි අගය -1 සිට $+1.6$ දක්වා වැඩි වන විට ශ්‍රිතයේ අගය ධන ව අඩු වේ.
- $x = +1.6$ දී ශ්‍රිතයේ අගය ශූන්‍ය වේ.
- x හි අගය 1.6 සිට වැඩි වන විට ශ්‍රිතයේ අගය ඍණ ව අඩු වේ.
- x හි අගය -3.6 හා $+1.6$ අතර විට ශ්‍රිතයේ අගය ධන වේ. (එනම්, ශ්‍රිතය ධන ව පවතින x හි පරාසය $-3.6 < x < +1.6$ වේ.
- x හි අගය -3.6ට අඩු වන විට හා $+1.6$ ට වැඩි වන විට ශ්‍රිතය ඍණ වේ. (එනම්, ශ්‍රිතය ඍණ වන x හි අගය පරාස $x < -3.6$ හා $x > 1.6$ වේ).
- ප්‍රස්තාරය $y = 0$ රේඛාව (x අක්ෂය) ඡේදනය වන්නේ $x = -3.6$ හා $x = +1.6$ දී වේ. එවිට $-x^2 - 2x + 6 = 0$ සමීකරණය තෘප්ත කරන x හි අගයයන් හෙවත් මූල වනුයේ $x = -3.6$ හා $x = +1.6$ ය.
- $0 \leq x \leq 2$ පරිදි වූ x අගය පරාසය තුළ ශ්‍රිතය ගන්නා උපරිම අගය 6 ද අවම අගය -2 ද වේ.

12.2 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය, සුදුසු පරිමාණයක් ගෙන, දී ඇති පරාසය තුළ ඇඳ දක්වන්න.

(i) $y = x^2 + 2x - 7 \; (-4 \leq x \leq 2)$

ප්‍රස්තාරයේ,

(a) අවම අගය
(b) හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක
(c) සමමිති අක්ෂය ඇඳ, එහි සමීකරණය
(d) $y = 0$ වන x හි අගයන්
(e) ශ්‍රිතය සෘණ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
(f) ශ්‍රිතය ධන වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
(g) ශ්‍රිතයෙහි අගය ධන ව අඩු වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
(h) ශ්‍රිතයෙහි අගය සෘණ ව වැඩි වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය

ලියා දක්වන්න.

2. $y = x^2 - 4x + 2$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීමට සකස් කළ අසම්පූර්ණ අගය වගුවක් පහත දැක්වේ.

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	___	2	-1	___	-1	2	7

(i) ඉහත වගුව සම්පූර්ණ කර, x අක්ෂය දිගේ කුඩා බෙදුම් දහයකින් ඒකක එකක් ද, y අක්ෂය දිගේ කුඩා බෙදුම් දහයකින් ඒකක එකක් ද නිරූපණය වන පරිදි පරිමාණය ගෙන, ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳ දක්වන්න.

(ii) ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන්

(a) ශ්‍රිතයේ හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක
(b) අවම අගය
(c) ශ්‍රිතයේ අගය ශූන්‍ය වන x හි අගයයන්
(d) $y \leq -1$ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
(e) $x^2 - 4x + 2 = 0$ සමීකරණයේ මූල

ලියා දක්වන්න.

3. පහත දැක්වෙන ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය, දක්වා ඇති අගය පරාසය තුළ සුදුසු පරිමාණයක් ගෙන ඇඳ දක්වන්න.

(i) $y = -x^2 - 2x + 3 \; (-4 \leq x \leq 2)$

ප්‍රස්තාරයේ,

(a) උපරිම අගය
(b) හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක
(c) සමමිති අක්ෂය ඇඳ එහි සමීකරණය

(d) $y = 0$ වන x හි අගයන්
(e) ශ්‍රිතය ධන වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
(f) ශ්‍රිතය සෘණ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
(g) ශ්‍රිතයෙහි අගය ධන ව වැඩි වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
(h) ශ්‍රිතයෙහි අගය සෘණ ව අඩු වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය

ලියා දක්වන්න.

4. $y = -2x^2 + 3x + 2$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීමට සුදුසු x හා y අගයයන් දැක්වෙන අසම්පූර්ණ අගය වගුවක් පහත දැක්වේ.

x	-2	-1	0	$\frac{3}{4}$	1	2	3	3.5
y	-12	-3	2	___	3	___	-7	-12

(i) ඉහත වගුවේ හිස්තැන් පුරවා, x අක්ෂය දිගේ කුඩා බෙදුම් දහයකින් ඒකක එකක් ද, y අක්ෂය දිගේ කුඩා බෙදුම් දහයකින් ඒකක එකක් ද නිරූපණය වන පරිදි පරිමාණය ගෙන, ඉහත සඳහන් ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳ දක්වන්න.

(ii) ඇඳිනු ලැබූ ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන්,
(a) ශ්‍රිතයේ හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක
(b) ශ්‍රිතයේ සමමිති රේඛාවේ සමීකරණය
(c) $-2x^2 + 3x + 2 = 0$ සමීකරණයේ මූල
(d) ශ්‍රිතය ධනව වැඩිවන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
(e) ශ්‍රිතයේ අගය 4 වන x හි අගයන්
(f) ශ්‍රිතයේ අගය -4 වන x හි අගයන්

ලියා දක්වන්න.

12.3 $y = \pm(x \pm b)^2 + c$ ආකාරයේ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාර

$y = \pm(x \pm b)^2 + c$ මගින් ද වර්ගජ ශ්‍රිතයක් දැක්වේ. මෙහි දී වර්ගජ ශ්‍රිතය විශේෂ ආකාරයකට, එනම් $y = \pm(x + b)^2 + c$ ආකාරයට ලියා ඇත. එසේ ලියා ඇති විට, ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරයෙහි සමහර ලක්ෂණ උකහා ගැනීම, ප්‍රස්තාරය ඇඳීමෙන් තොර ව ම සිදු කළ හැකි ය. පහත වගුවේ දැක්වෙන්නේ එසේ උකහා ගත හැකි ලක්ෂණ කිහිපයකි.

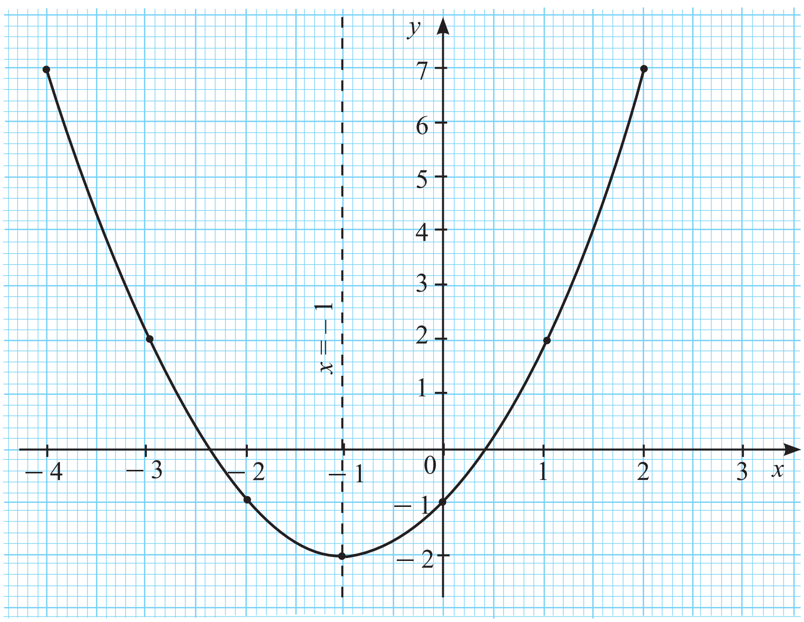
ශ්‍රිතයේ සමීකරණය	හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ස්වභාවය	ශ්‍රිතයේ උපරිම/අවම අගය	ප්‍රස්තාරයේ උපරිම/අවම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක	ප්‍රස්තාරයේ සමමිති රේඛාවේ සමීකරණය	ප්‍රස්තාරය y - අක්ෂය කපන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක
$y = (x + b)^2 + c$	අවමයකි	c	$(-b, c)$	$x = -b$	$(0, b^2 + c)$
$y = -(x + b)^2 + c$	උපරිමයකි	c	$(-b, c)$	$x = -b$	$(0, -b^2 + c)$

වගුවේ දැක්වෙන ලක්ෂණ සත්‍යාපනය කර ගැනීම සඳහා පහත දැක්වෙන නිදසුන සලකා බලමු.

$y = (x + 1)^2 - 2$ ශ්‍රිතය සලකමු. එය $b = 1$ හා $c = -2$ වන $y = (x + b)^2 + c$ ආකාරයේ වේ. එම ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය x හි අගය -4 සිට $+2$ දක්වා ඇඳීමට අවශ්‍ය අනුරූප y හි අගයන් පහත ආකාරයට වගුවක් ඇසුරෙන් ගණනය කරමු.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$(x+1)^2$	9	4	1	0	1	4	9
-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
y	7	2	-1	-2	-1	2	7
(x, y)	$(-4, 7)$	$(-3, 2)$	$(-2, -1)$	$(-1, -2)$	$(0, -1)$	$(1, 2)$	$(2, 7)$

x-අක්ෂය ඔස්සේ කුඩා බෙදුම් 10කින් ඒකක එකක් ද, y අක්ෂය ඔස්සේ කුඩා බෙදුම් 10කින් ඒකක දෙකක් ද වන පරිදි පරිමාණය ගෙන, ඉහත ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය පහත දැක්වෙන ආකාරයට ඇඳ දැක්විය හැකි ය.



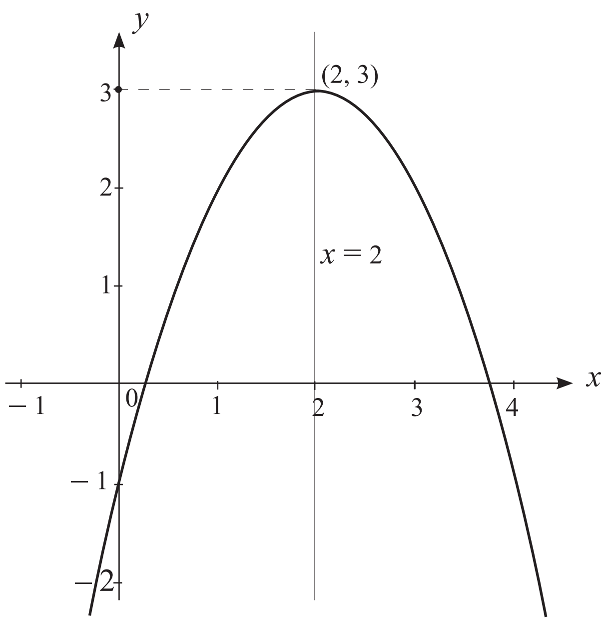
සටහන:
මෙම ප්‍රස්තාරයට අවම ලක්ෂ්‍යයක් ඇත. ශ්‍රිතයේ අවම අගය -2 $(=c)$ වේ. ප්‍රස්තාරයේ අවම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $(-1, -2)$ එනම්, $(-b, c)$ වන අතර සමමිති අක්ෂය $x = -1$ (එනම්, $x = -b$ වේ.)

වර්ගජ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාරය $x = \pm (x+b)^2 - c$ ආකාරයෙන් දී ඇති විට, ඉහත වගුවේ දක්වා ඇති ලක්ෂණ ආධාරයෙන්, ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් ඇඳිය හැකි ය. පහත නිදසුනේ එවැනි දළ සටහනක් අඳින ආකාරය පැහැදිලි කෙරේ.

නිදසුන 1

$y = -\ (x-2)^2 + 3$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් ඇඳ දක්වන්න.

මෙම ශ්‍රිතයේ $(x-2)^2$ හි සංගුණකය සෘණ නිසා ප්‍රස්තාරයෙහි හැරුම් ලක්ෂ්‍යය උපරිමයකි. එම උපරිම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $(2, 3)$ වේ. සමමිති රේඛාව $x = 2$ වේ. තව ද, ප්‍රස්තාරය y - අක්ෂය කපන ස්ථානය සොයා ගැනීම සඳහා $y = -\ (x-2)^2 + 3$ හි $x = 0$ ආදේශ කරමු. එවිට, $y = -(0-2)^2 + 3 = -1$ ලැබේ. ඒ අනුව, පහත ආකාරයේ දළ සටහනක් ඇඳිය හැකි ය.



නිදසුන 2

$y = x^2 + 3x - 4$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරයේ

(i) ස්වභාවය

(ii) සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය

(iii) ශ්‍රිතයේ උපරිම/අවම අගය

(iv) හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක

ලියා දක්වන්න.

ශ්‍රිතය $y = ax^2 + bx + c$ ආකාරයෙන් දී ඇත. මුලින් ම එය $y = (x + b)^2 + c$ ආකාරයෙන් ලියා ගනිමු. මේ සඳහා පහත ක්‍රමය යොදාගත හැකි ය.

$$y = x^2 + 3x - 4$$

$$y = (x + \frac{3}{2})^2 - 4 - \frac{9}{4}\text{, එනම් } y = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{4}$$

(i) අවමයක් සහිත පරාවලයකි

(ii) $x = -\frac{3}{2}$ එනම් $x = -1\frac{1}{2}$

(iii) අවම අගය $-\frac{25}{4}$ වේ.

(iv) $(-\frac{3}{2}, -\frac{25}{4})$

12.3 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් ශ්‍රිතය ඊට ඉදිරියෙන් සඳහන් කර ඇති x හි අගය පරාසය තුළ සුදුසු පරිමාණයක් තෝරා ගෙන ඇඳ දක්වන්න.

(i) $y = (x - 2)^2 - 3 \quad (-1 \leq x \leq 5)$ (ii) $y = (x + 3)^2 - 4 \quad (-6 \leq x \leq 0)$

ඉහත එක් එක් ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන්

a. ශ්‍රිතයේ අවම අගය

b. ප්‍රස්තාරයේ අවම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක

c. සමමිති අක්ෂය ඇඳ එහි සමීකරණය

d. ශ්‍රිතය ධන වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය

e. $y = 0$ වන x හි අගයයන්

f. ශ්‍රිතය ඍණ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය

ලියා දක්වන්න.

2. පහත දැක්වෙන එක් එක් ශ්‍රිතය ඊට ඉදිරියෙන් සඳහන් කර ඇති x හි අගය පරාසය තුළ සුදුසු පරිමාණයක් තෝරා ගෙන ඇඳ දක්වන්න.

(i) $y = -(x + 2)^2 + 2 \quad (-5 \leq x \leq 1)$ (ii) $y = -(x - 1)^2 + 3 \quad (-2 \leq x \leq 4)$

ඉහත ඇඳි එක් එක් ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන්

a. ශ්‍රිතයේ උපරිම අගය
b. ප්‍රස්තාරයේ උපරිම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක
c. ශ්‍රිතයේ සමමිති රේඛාව ඇඳ එහි සමීකරණය
d. ශ්‍රිතය ධන වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
e. ශ්‍රිතය ඍණ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
f. $y = 0$ වන x හි අගයයන්
g. ශ්‍රිතය ධන ව වැඩි වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය
h. ශ්‍රිතය ඍණ ව අඩු වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය

ලියා දක්වන්න.

3. පහත දැක්වෙන එක් එක් ශ්‍රිතයේ දළ සටහනක් ඇඳ දක්වන්න.

(i) $y = (x-2)^2 - 3$
(ii) $y = 2 - (x+5)^2$
(iii) $y = x^2 + 6x - 1$

4. පහත දැක්වෙන එක් එක් ශ්‍රිතය මගින් නිරූපණය වන ප්‍රස්තාරය නොඇඳ, ශ්‍රිතයේ

a. ස්වභාවය
b. සමමිති රේඛාවේ සමීකරණය
c. උපරිම/අවම අගය
d. හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වන්න.

(i) $y = (x+2)^2 - 3$
(ii) $y = -(x-2)^2 + 4$
(iii) $y = -(x - \frac{3}{2})^2 + 1$
(iv) $y = 1\frac{1}{2} - (x - \frac{1}{2})^2$
(v) $y = 3\frac{1}{3} + (x + 2\frac{1}{2})^2$
(vi) $y = (x^2 + 6x + 5)$

12.4 $y = \pm (x \pm a)(x \pm b)$ ආකාරයේ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාර

$y = \pm (x + a)(x + b)$ මගින් ද වර්ගජ ශ්‍රිතයක් දැක්වේ. මෙහි දී වර්ගජ ශ්‍රිතය විශේෂ ආකාරයකට, එනම් $y = \pm (x + a)(x + b)$ ආකාරයට දී ඇත. එසේ දී ඇති විට, ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරයෙහි සමහර ලක්ෂණ උකහා ගැනීම, ඉහත කොටසේ පරිදි ම ප්‍රස්තාරය ඇඳීමෙන් තොර ව ම සිදු කළ හැකි ය. පහත වගුවේ දැක්වෙන්නේ එසේ උකහා ගත හැකි ලක්ෂණ කිහිපයකි.

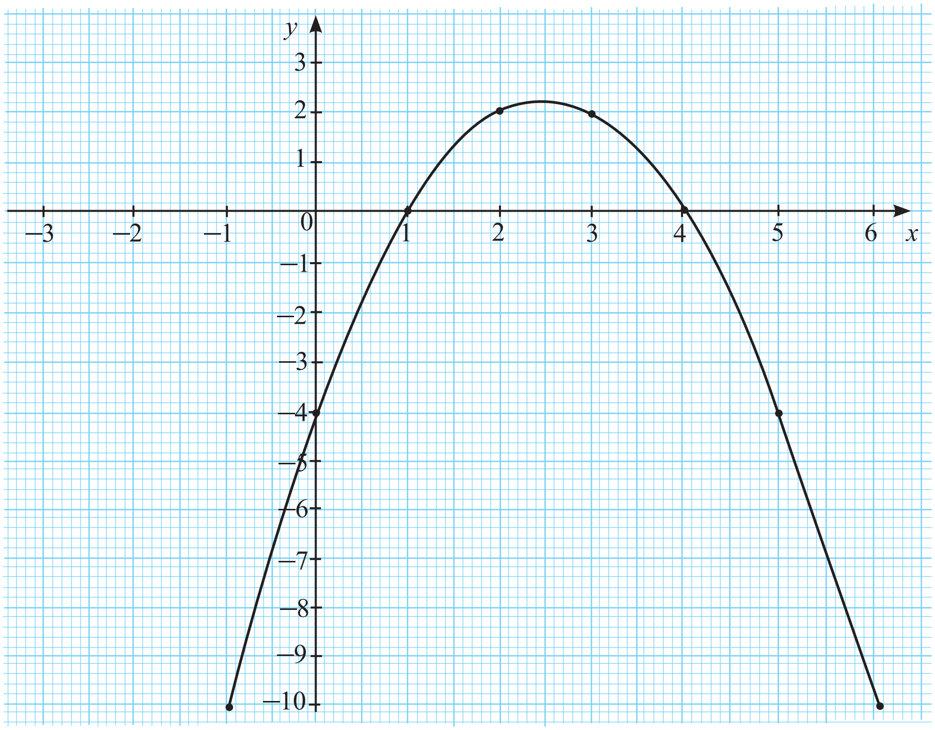
ශ්‍රිතයේ සමීකරණය	හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ස්වභාවය	ප්‍රස්තාරයේ උපරිම/අවම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක	ප්‍රස්තාරයේ සමමිති රේඛාවේ සමීකරණය	ප්‍රස්තාරය x-අක්ෂය කපන ලක්ෂ්‍ය	ප්‍රස්තාරය y - අක්ෂය කපන ලක්ෂ්‍යය
$y = (x+a)(x+b)$	අවමයකි	$\left(-\frac{(a+b)}{2}, -\frac{(a-b)^2}{4}\right)$	$x = -\frac{(a+b)}{2}$	$(-a, 0)$ හා $(-b, 0)$	$(0, +ab)$
$y = -(x+a)(x+b)$	උපරිමයකි	$\left(-\frac{(a+b)}{2}, \frac{(a-b)^2}{4}\right)$	$x = -\frac{(a+b)}{2}$	$(-a, 0)$ හා $(-b, 0)$	$(0, -ab)$

ඉහත වගුවේ දැක්වෙන ලක්ෂණ සත්‍යාපනය කර ගැනීම සඳහා පහත දැක්වෙන නිදසුන සලකා බලන්න.

$y = -(x-1)(x-4)$ ශ්‍රිතය සලකමු. එය, $y = -(x+a)(x+b)$ ආකාරයේ වේ. ($a = -1$ හා $b = -4$). එහි ප්‍රස්තාරය ඇඳීමට අවශ්‍ය x හි අගය ලබා ගැනීමට පහත පරිදි අගය වගුවක් සකස් කරමු.

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$-(x-1)(x-4)$	-10	-4	0	2	2	0	-4	-10
(x, y)	$(-1, -10)$	$(0, -4)$	$(1, 0)$	$(2, 2)$	$(3, 2)$	$(4, 0)$	$(5, -4)$	$(6, -10)$

x අක්ෂය ඔස්සේ කුඩා බෙදුම් 10කින් ඒකක එකක් ද, y අක්ෂය ඔස්සේ කුඩා බෙදුම් 10කින් ඒකක දෙකක් ද වන පරිදි පරිමාණය ගෙන, ඉහත ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය පහත දැක්වෙන ආකාරයට ඇඳ දැක්විය හැකි ය.



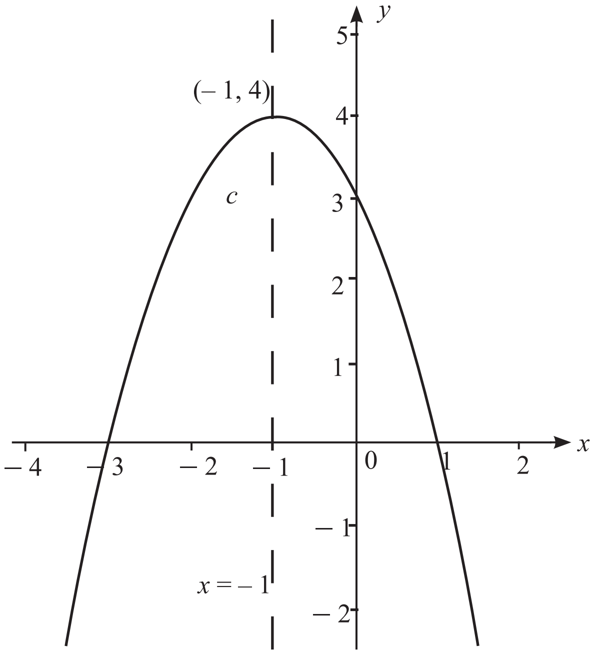
මෙම ප්‍රස්තාරය, වගුවේ දී ඇති ලක්ෂණ සපුරාලන බව, ඉහත 12.3 කොටසේ නිදසුනේ දී මෙන් තහවුරු කර ගන්න.

වර්ගජ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාරය $y = \pm(x+a)(x+b)$ ආකාරයෙන් දී ඇති විට, ඉහත වගුවේ දක්වා ඇති ලක්ෂණ ආධාරයෙන්, ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් ඇඳිය හැකි ය. පහත නිදසුනෙන් එවැනි දළ සටහනක් අඳින ආකාරය පැහැදිලි කෙරේ.

නිදසුන 1

$y = -(x+3)(x-1)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් ඇඳ දක්වන්න.

මෙය, $a = 3$ හා $b = -1$ වන $y = -(x+a)(x+b)$ ආකාරයේ ශ්‍රිතයකි. මෙම ශ්‍රිතයේ x හි සංගුණකය ඍණ නිසා ප්‍රස්තාරයෙහි හැරුම් ලක්ෂ්‍යය උපරිමයකි. x - අක්ෂය කපන ලක්ෂ්‍ය වන්නේ $(-3, 0)$ හා $(1, 0)$ යි. උපරිම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක වන්නේ $\left(-\dfrac{(a+b)}{2}, \dfrac{+(a-b)^2}{4}\right) = (-1, +4)$ යි. ඒ අනුව, පහත ආකාරයේ දළ සටහනක් ඇඳිය හැකි ය.



නිදසුන 2

$y = x^2 + 5x - 14$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය නොඇඳ, ප්‍රස්තාරයේ

(i) ස්වභාවය

(ii) සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය

(iii) උපරිම/අවම අගය

(iv) හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක

(v) x අක්ෂය ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක

ලියා දක්වන්න.

දැන් මෙම ශ්‍රිතය $y = (x+a)(x+b)$ ආකාරයට සකසා ගනිමු. සාධක සෙවීමෙන්, එය

$y = (x-2)(x+7)$ ලෙස ලියා ගත හැකි ය.

(i) ශ්‍රිතය අවම අගයක් සහිත පරාවලයකි.

(ii) $a = -2$ හා $b = 7$ නිසා සමමිති අක්ෂය වන්නේ

$$x = -(a+b)/2 = -(-2+7)/2$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

(iii) අවම අගය $\dfrac{-(a-b)^2}{4}$ මගින් ලැබෙන නිසා,

$$\text{අවම අගය} = \frac{-(-2-7)^2}{4} = -\frac{81}{4}$$

(iv) අවම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $\left(-\dfrac{5}{2}, -\dfrac{81}{4}\right)$

(v) ප්‍රස්තාරය x-අක්ෂය ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක $(-a, 0)$ හා $(-b, 0)$ මගින් ලැබෙන නිසා $(2, 0)$ හා $(-7, 0)$ වේ.

12.4 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් ශ්‍රිතයෙහි ප්‍රස්තාරය, ඊට ඉදිරියෙන් සඳහන් කර ඇති x හි අගය පරාසය තුළ සුදුසු පරිමාණයක් තෝරා ගෙන ඇඳ දක්වන්න.

(a) $y = (x+1)(x+6)$ $\quad(-7 \leq x \leq 0)$

(b) $y = (x-2)(x-5)$ $\quad(0 \leq x \leq 7)$

(c) $y = -(x+1)(x+3)$ $\quad(-5 \leq x \leq 1)$

(d) $y = -(x-5)(x-3)$ $\quad(+1 \leq x \leq 7)$

ඉහත ඇඳි එක් එක් ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන්

(i) y ශූන්‍ය වන x හි අගයයන්

(ii) ශ්‍රිතයේ සමමිති රේඛාව ඇඳ, එහි සමීකරණය

(iii) ශ්‍රිතයේ අවම/උපරිම අගය

(iv) ප්‍රස්තාරයේ අවම/උපරිම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංකය

(v) ශ්‍රිතය ධන වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය

(vi) ශ්‍රිතය සෘණ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය

(vii) අදාළ x හි අගය ප්‍රාන්තරය තුළ y හි විචලනයේ ස්වභාවය

ලියා දක්වන්න.

2. පහත දැක්වෙන එක් එක් ශ්‍රිතයේ දළ සටහනක් ඇඳ දක්වන්න.

(i) $y = (x-3)(x+5)$

(ii) $y = (x-1)(x-2)$

(iii) $y = -(x+3)(x-6)$

3. පහත දැක්වෙන එක් එක් ශ්‍රිත මගින් නිරූපණය වන ප්‍රස්තාර නොඇඳ

a. ප්‍රස්තාරයේ ස්වභාවය $\quad$ **b.** සමමිති රේඛාවේ සමීකරණය

c. උපරිම/අවම අගය $\quad$ **d.** හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වන්න.

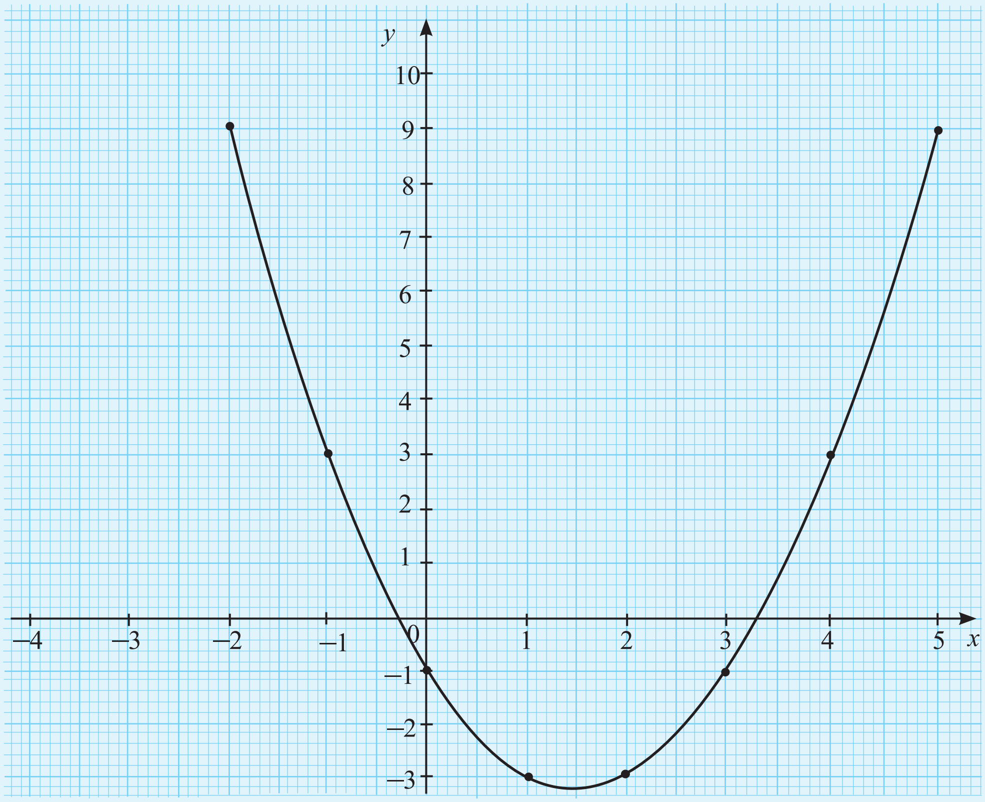
(i) $y = (x-2)\ (x+3)$ $\quad$ (ii) $y = (x+1)\ (x-4)$ $\quad$ (iii) $y = (x-4)\ (x-1)$

(iv) $y = -(x-\frac{1}{2})\ (x+3)$ $\quad$ (v) $y = x^2 - 1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$ $\quad$ (vi) $y = x^2 - 4x + 7$

(vii) $y = -x^2 - 6x - 5$ $\quad$ (viii) $y = -x^2 + 12x + 35$ $\quad$ (ix) $y = x^2 - x + 4$

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. (*a*) $-2 \leq x \leq 5$ ප්‍රාන්තරය තුළ අඳින ලද වර්ගජ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාරය රූපයේ දැක්වේ. ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන්,



(i) $x = 3$ විට y හි අගය සොයන්න.

(ii) සමමිති රේඛාව ඇඳ, එහි සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

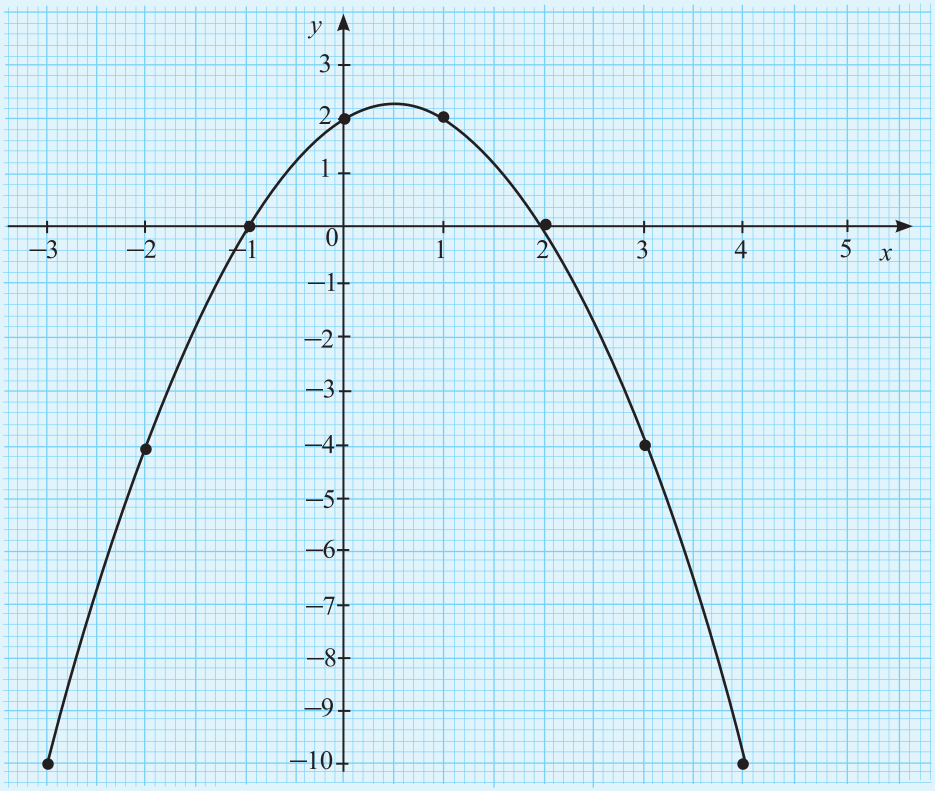
(iii) ශ්‍රිතය සෘණ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය ලියා දක්වන්න.

(iv) මෙම වර්ගජ ශ්‍රිතය $y = (x - a)^2 + b$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කළ හොත්, a හා b හි අගය සොයන්න.

(v) ඉහත (iv) අනුව $y = 0$ වන x හි අගයන් ලබා ගන්න.

(vi) මෙම ශ්‍රිතයේ සමමිති රේඛාවම සහිත වූ ද උපරිම අගය 5 වූ x^2 සංගුණකය 1 වන ශ්‍රිතය ලියා දක්වන්න.

(*b*) $-3 \leq x \leq 4$ ප්‍රාන්තරය තුළ අඳින ලද වර්ගජ ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාරය රූපයේ දැක්වේ.



(i) $y = 0$ වන x හි අගයයන් ලියා දක්වන්න.

(ii) ඉහත (i) හි පිළිතුර ඇසුරෙන්, අඳිනු ලැබූ ප්‍රස්තාරයට අදාළ වර්ගජ ශ්‍රිතය $y = -(x - a)(x - b)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කළ හොත් ලැබෙන, a හා b හි අගයයන් ලියා දක්වන්න.

(iii) ඉහත (ii) හි a හා b අගයයන් ආදේශ කර ලැබෙන වර්ගජ ශ්‍රිතය $y = -(x - p)^2 + q$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කර, ශ්‍රිතයේ උපරිම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලබා ගෙන, එම අගය ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන් තහවුරු කරන්න.

(iv) $y \leq -4$ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය ලියා දක්වන්න.

(v) ශ්‍රිතයේ අගය ධන ව වැඩි වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය ලියා දක්වන්න.

2. $(x + 2)$ හා $(3 - x)$ යනු සංඛ්‍යා දෙකකි. $y = (x + 2)(3 - x)$ මගින් එම සංඛ්‍යා දෙකෙහි ගුණිතය දැක්වේ.

(i) පහත දැක්වෙන වගුවේ හිස්තැන් පුරවන්න.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-6	___	___	6	___	4	___	-6

(ii) සුදුසු පරිමාණයක් ගෙන ඉහත y ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳ දක්වන්න.
අඳිනු ලැබූ ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්

(iii) ගුණිතයේ උපරිම අගය සොයන්න.
(iv) ගුණිතය උපරිම වන x හි අගය සොයන්න.
(v) ගුණිතය ශූන්‍ය වන x හි අගයයන් ලියා දක්වන්න.
(vi) $y > 3$ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය ලියා දක්වන්න.
(vii) x කුමන අගය ප්‍රාන්තරය තුළ විචලනය වන විට ගුණිතය ක්‍රමයෙන් වැඩි වේ ද?
(viii) x හි කුමන අගය ප්‍රාන්තරයක් තුළ දී ගුණිතය සඳහා ධන අගයක් ලැබේ ද?
(ix) $-1 \leq x \leq 3$ පරාසය තුළ ගුණිතයේ උපරිම හා අවම අගය ලියා දක්වන්න.
(x) $5 \leq x \leq 8$ පරාසය තුළ ගුණිතයේ උපරිම හා අවම අගය ලියා දක්වන්න.

3. $y = (x-2)^2 - 2$ ශ්‍රිතයේ දී ඇති x හි අගය කිහිපයකට අනුරූප y හි අගයන් ඇතුළත් අසම්පූර්ණ වගුවක් පහත දැක්වේ.

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	7	2	-1	-2	___	2	7

(i) වගුව සම්පූර්ණ කරන්න.
(ii) සුදුසු පරිමාණයක් තෝරාගෙන ඉහත ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.
(iii) ශ්‍රිතයේ හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වන්න.
(iv) $y < 0$ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය ලියා දක්වන්න.
(v) ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන් හා වීජීය ක්‍රමයෙන් $x^2 - 4x + 2 = 0$ සමීකරණයේ මූල සොයන්න.
(vi) ශ්‍රිතයේ අගය 3 වන්නේ x හි කුමන අගයන් සඳහා ද යන්න ලියා දක්වන්න.

4. $y = -(x+1)(x-3)$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීමට සුදුසු x හා y හි අගය ඇතුළත් අසම්පූර්ණ වගුවක් පහත දැක්වේ.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	___	0	3	4	3	___	-5

(i) $x = -2$ විට හා $x = 3$ විට y හි අගය සොයන්න.
(ii) සුදුසු පරිමාණයක් ගෙන ඉහත ප්‍රස්තාරය ඇඳ දක්වන්න.
(iii) ප්‍රස්තාරයේ උපරිම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වන්න.
(iv) $y = 0$ වන x හි අගයන් ලබා ගෙන, ඒ ඇසුරෙන් ශ්‍රිතයේ උපරිම අගය නිවැරදි බව තහවුරු කරන්න.
(v) $y \geq -1$ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය ලියා දක්වන්න.
(vi) $-x^2 + 2x + 3 = 0$ සමීකරණයේ මූල ලියා දක්වන්න.
(vii) $1 \leq x \leq 4$ ප්‍රාන්තරය තුළ ශ්‍රිතයේ හැසිරීම විස්තර කරන්න.

5. $y = 5 - x - x^2$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීමට සුදුසු x හා y හි අගය ඇතුළත් අසම්පූර්ණ වගුවක් පහත දැක්වේ.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	___	-1	3	5	5	___	-1	-7

(i) $x = -4$ හා $x = 1$ විට y හි අගය සොයන්න.
(ii) සුදුසු පරිමාණයක් ගෙන, ඉහත ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳ දක්වන්න.
(iii) ප්‍රස්තාරයේ උපරිම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වන්න.
(iv) ශ්‍රිතයේ අගය -5 සිට $+3$ තෙක් වැඩි වන විට x හි අගය පරාසය ලියා දක්වන්න.
(v) ශ්‍රිතය ඍණ වන x හි අගය ප්‍රාන්තරය ලියා දක්වන්න.
(vi) $-x^2 - x + 5 = 0$ සමීකරණයේ මූල ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.
(vii) $y - 3 = 5 - x - x^2$ ශ්‍රිතයේ උපරිම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක අපෝහනය කරන්න.

13 සමීකරණ

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- පරිමේය සංගුණක සහිත සමගාමී සමීකරණ ගොඩනැගීමට හා විසඳීමට
- සාධකවලට වෙන් කිරීමෙන්, වර්ග පූරණයෙන් හා සූත්‍රය භාවිතයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

සමගාමී සමීකරණ විසඳීම

සමගාමී සමීකරණ විසඳීම සම්බන්ධ ව ඔබ මීට පෙර ලබා ගත් දැනුම පුනරීක්ෂණය සඳහා පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. පහත සඳහන් සමගාමී සමීකරණ විසඳන්න.

a. $6x + 2y = 1$
$4x - y = 3$

b. $a + 2b = 3$
$2a + 3b = 4$

c. $m - 4n = 6$
$3m + 2n = 4$

d. $9p - 2q = 13$
$7p - 3q = 0$

e. $2x + 3y = 12$
$3x - 4y = 1$

f. $3a + 12 = 2b$
$13 + 2a = 3b$

2. සරත් ළඟ රුපියල් දෙකේ හා රුපියල් පහේ කාසි 20ක් තිබේ. ඒවායේ මුළු වටිනාකම රුපියල් 55කි. සරත් ළඟ ඇති රුපියල් දෙකේ කාසි ගණන x ද රුපියල් පහේ කාසි ගණන y ද ලෙස සලකා,

(i) දී ඇති තොරතුරු දැක්වීමට සමීකරණ දෙකක් ලියන්න

(ii) එමගින්, සරත් ළඟ ඇති රුපියල් දෙකේ හා රුපියල් පහේ කාසි ගණන සොයන්න.

3. මාලනී හා නාලනී ළඟ යම් මුදල් ප්‍රමාණ ඇත. මාලනී ළඟත් නාලනී ළඟත් ඇති මුදල්වල ඓක්‍යයට රුපියල් 30ක් එකතු වූ විට මුළු මුදල රුපියල් 175ක් වේ. නාලනී ළඟ ඇත්තේ මාලනී ළඟ ඇති මුදලේ දෙගුණයට වඩා රුපියල් 95ක් අඩුවෙනි. මාලනී ළඟ ඇති මුදල රුපියල් x ද, නාලනී ළඟ ඇති මුදල රුපියල් y යැයි ද සලකා

(i) දී ඇති තොරතුරු භාවිත කොට සමීකරණ යුගලයක් ලියන්න

(ii) එමගින්, මාලනී ළඟත් නාලනී ළඟත් ඇති මුදල් වෙන වෙන ම සොයන්න.

4. ''පොත් 2ක් හා පෑනක් මිල දී ගැනීමට රුපියල් 65ක් වැය වේ. එවැනි පෑන් 2ක් මිල දී ගැනීමට වැය වන මුදලින් එවැනි පොතක් මිල දී ගත හැකි වේ.'' යන තොරතුරු ඇසුරෙන් සමගාමී සමීකරණ යුගලක් ගොඩනගා පොතක මිලත්, පෑනක මිලත් වෙන වෙන ම සොයන්න.

13.1 භාගමය සංගුණක සහිත සමගාමී සමීකරණ

සමගාමී සමීකරණ යුගලයක අඥාතවල සංගුණක නිඛිල වන විට දී එම සමගාමී සමීකරණ විසඳා අඥාතවල අගය සෙවීමට මින් පෙර අපි උගත්තෙමු. මෙතැන් සිට සංගුණක ලෙස භාග යෙදෙන සමගාමී සමීකරණ ගොඩනැගීම හා විසඳීම පිළිබඳ ව නිදසුන් ඇසුරෙන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1

කමල් හා නිමල් ළඟ යම් මුදල් ප්‍රමාණයක් ඇත. කමල් ළඟ ඇති මුදලින් $\frac{1}{2}$ කට නිමල් ළඟ ඇති මුදලින් $\frac{1}{3}$ ක් එකතු කළ විට රුපියල් 20ක් ලැබේ. කමල් ළඟ ඇති මුදලින් $\frac{1}{4}$ ක් නිමල් ළඟ ඇති මුදලින් $\frac{1}{6}$ කට සමාන නම්, දෙදෙනා ළඟ ඇති මුදල් ප්‍රමාණ වෙන වෙන ම සොයන්න.

මෙම ගැටලුව සමගාමී සමීකරණ යුගලයක් ගොඩනගා විසඳන අයුරු සලකා බලමු.
කමල් ළඟ ඇති මුදල් ප්‍රමාණය රුපියල් x ද, නිමල් ළඟ ඇති මුදල් ප්‍රමාණය රුපියල් y ද ලෙස ගනිමු.

එවිට,

කමල් ළඟ ඇති මුදලෙන් $\frac{1}{2}$ ක් වන $\frac{1}{2}x$ හා නිමල් ළඟ ඇති මුදලින් $\frac{1}{3}$ ක් වන $\frac{1}{3}y$ එකතු කළ විට $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$ ලැබේ. එය රුපියල් 20ට සමාන බැවින්

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 20$ ——— ① ලෙස එක් සමීකරණයක් ලැබේ.

එලෙස ම, කමල් ළඟ ඇති මුදලින් $\frac{1}{4}$ ක් නිමල් ළඟ ඇති මුදලින් $\frac{1}{6}$ කට සමාන නිසා

$\frac{1}{4}x = \frac{1}{6}y$ සමීකරණය ලැබේ.

එය $\frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y = 0$ ——— ② ලෙස ලිවිය හැකි වේ.

සංගුණක ලෙස භාග අඩංගු සමගාමී සමීකරණ විසඳීමේ දී ප්‍රථමයෙන් එම සංගුණක, නිඛිල බවට හරවා ගෙන, විසඳීම බොහෝ විට පහසු ය. ඒ අනුව ① සමීකරණයේ සංගුණකවල හරයන්ගේ කුඩා පොදු ගුණාකාරයෙන් සමීකරණය ගුණ කිරීමෙන්, පහසුවෙන් සංගුණක නිඛිල බවට හරවා ගත හැකි ය.

එමනිසා, ① සමීකරණය 2 හා 3 හි කු.පො.ගු. වන 6න් හා ② සමීකරණය 4 හා 6 හි කු.පො.ගු. වන 12න් ගුණ කරමු.

① $\times$ 6න්; $6 \times \frac{1}{2}x + 6 \times \frac{1}{3}y = 6 \times 20$

$\therefore \quad 3x + 2y = 120$ ——— ③

② $\times$ 12න්; $12 \times \frac{1}{4}x - 12 \times \frac{1}{6}y = 12 \times 0$

$$3x - 2y = 0 \quad \text{———} ④$$

දැන් ① හා ② සමීකරණ විසඳීම වෙනුවට, එයට තුල්‍ය වන ③ හා ④ විසඳීම කළ හැකි ය. එමනිසා, ③ හා ④ සමීකරණ විසඳමු.

③ + ④ $\quad (3x + 2y) + (3x - 2y) = 120 + 0$

$$3x + 2y + 3x - 2y = 120$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{120}{6}$$

$$x = 20$$

$x = 20$ ④ සමීකරණයෙහි ආදේශයෙන්

$$3 \times 20 - 2y = 0$$

$$2y = 60$$

$$y = 30$$

$\therefore$ කමල් ළඟ ඇති මුදල = රුපියල් 20

නිමල් ළඟ ඇති මුදල = රුපියල් 30

සටහන: මෙම ගැටලුවේ දී සංගුණක නිඛිල ආකාරයට හරවා ගත් පසු සමීකරණ එකතු කිරීමෙන් y ඉවත් කොට අපි x හි අගය සෙව්වෙමු. අවශ්‍ය නම් එක් අඥාතයක් උක්ත කර අනෙක් සමීකරණයේ ආදේශයෙන් ද පිළිතුර ලබා ගත හැකි ය. එවැනි නිදසුනක් දැන් විමසා බලමු.

නිදසුන 2 විසඳන්න:

$$\frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b = -2 \quad \text{———} ①$$

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b = 9 \quad \text{———} ②$$

මෙම සමීකරණ යුගලයෙන්, එක් අඥාතයක් උක්ත කර අනෙක් සමීකරණයට ආදේශ කොට විසඳමු.

මේ සඳහා $\quad \frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b = -2$

$$\frac{1}{6}a = -2 + \frac{1}{5}b$$

$a = -12 + \frac{6}{5}b$ (දෙපස ම 6න් ගුණ කිරීමෙන්) ——— ③

මෙම a හි අගය ② සමීකරණයට ආදේශ කරමු.

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b = 9$$

$$\frac{1}{3}(-12 + \frac{6}{5}b) + \frac{1}{4}b = 9$$

$$-4 + \frac{2}{5}b + \frac{1}{4}b = 9$$

4හි හා 5 හි කු.පො.ගු. වන 20 පොදු හරය ලෙස සකසා ගෙන භාග සුළු කරමු.

$$\frac{8}{20}b + \frac{5}{20}b = 9 + 4$$

$$\frac{13}{20}b = 13$$

$$b = \frac{13 \times 20}{13}$$

$$b = 20$$

$b = 20$ ③ සමීකරණය ට ආදේශයෙන් (මෙහි දී ඕනෑ ම සමීකරණය ට ආදේශ කළ හැකි වේ.)

$$a = -12 + \frac{6}{5}b$$

$$a = -12 + \frac{6}{5} \times 20$$

$$a = -12 + 24$$

$$a = 12$$

එනම් විසඳුම් $a = 12$ හා $b = 20$ වේ.

ඉහත සමගාමී සමීකරණ යුගලයේ විසඳුම වන $a = 12$ හා $b = 20$ යන අගයන් එම සමීකරණවලට ආදේශ කිරීමෙන් එම විසඳුම සත්‍ය බව වටහා ගත හැකි වේ.

$a = 12$ හා $b = 20$ ① සමීකරණයේ වම් පැත්තට ආදේශ කරමු.

$$\frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b = -2$$

$$\text{වම් පැත්ත} = \frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b$$

$$= \frac{1}{6} \times 12 - \frac{1}{5} \times 20$$

$$= 2 - 4$$

$$= -2$$

එනම් වම් පැත්ත = දකුණු පැත්ත

$\therefore \quad \frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b = -2$ සමීකරණය, $a = 12$ හා $b = 20$ මගින් තෘප්ත වේ.

එමෙන් ම,
$a = 12$ හා $b = 20$ ② සමීකරණයේ වම් පැත්තට ආදේශ කරමු.

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b = 9$$

වම් පැත්ත $= \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b$

$$= \frac{1}{3} \times 12 + \frac{1}{4} \times 20$$
$$= 4 + 5$$
$$= 9$$

$\therefore$ වම් පැත්ත = දකුණු පැත්ත

එනම් $\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b = 9$ සමීකරණයද $a = 12$ හා $b = 20$ මගින් තෘප්ත වේ.
මේ අනුව $a = 12$ හා $b = 20$ නිවැරදි විසඳුම බව පැහැදිලි ය.

නිදසුන 3 විසඳන්න:

$$\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n = 1$$

$$\frac{5}{6}m + \frac{1}{3}n = 4$$

$\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n = 1$ ——— ①

$\frac{5}{6}m + \frac{1}{3}n = 4$ ——— ② ලෙස ගනිමු.

නිදසුන 1 හි පරිදි මෙම සමීකරණවල භාගමය සංගුණක, නිඛිල බවට පත් කර විසඳිය හැකි ය. තව ද, එක් විචල්‍යයක භාගමය සංගුණක සමාන කිරීමෙන් ද විසඳිය හැකි වේ. මේ සඳහා ② සමීකරණය 2න් ගුණ කිරීමෙන් n හි සංගුණක සමාන කර ගනිමු.

② $\times$ 2න් $\qquad \frac{10}{6}m + \frac{2}{3}n = 8$ ——— ③

දැන්, ① හා ② සමීකරණ වෙනුවට ① හා ③ සමීකරණ විසඳිය හැකි ය.

③ − ① න් $\left(\frac{10}{6}m + \frac{2}{3}n\right) - \left(\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n\right) = 8 - 1$

$$\frac{10}{6}m + \frac{2}{3}n - \frac{1}{2}m - \frac{2}{3}n = 7$$

$$\frac{10}{6}m - \frac{3}{6}m = 7$$

$$\frac{7}{6}m = 7$$

$$7m = 7 \times 6$$
$$m = 6$$

$m = 6$ ① ට ආදේශ කරමු.

$$\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n = 1$$

$$\frac{1}{2} \times 6 + \frac{2}{3}n = 1$$

$$3 + \frac{2}{3}n = 1$$

$$\frac{2}{3}n = 1 - 3$$

$$\frac{2}{3}n = -2$$

$$2n = -6$$

$$n = -3$$

එනම්, විසඳුම $m = 6$ හා $n = -3$ වේ.

පෙර විසඳූ ගැටලුවේ මෙන් ම $m = 6$ හා $n = -3$ මුල් සමීකරණවල ආදේශ කර බැලීමෙන් පිළිතුරේ නිවැරදි බව සහතික කර ගත හැකි ය.

$m = 6$ හා $n = -3$ යන විසඳුම් ආදේශ කරමු.

$$\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n = 1 \text{ ——— } ①$$

$$\text{වම් පැත්ත} = \frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n$$
$$= \frac{1}{2} \times 6 + \frac{2}{3} \times (-3)$$
$$= 3 - 2$$
$$= \underline{\underline{1}}$$

$\therefore$ වම් පැත්ත = දකුණු පැත්ත

$$\frac{5}{6}m + \frac{1}{3}n = 4 \text{ ——— } ②$$

$$\text{වම් පැත්ත} = \frac{5}{6}m + \frac{1}{3}n$$
$$= \frac{5}{6} \times 6 + \frac{1}{3} \times (-3)$$
$$= 5 - 1$$
$$= \underline{\underline{4}}$$

$\therefore$ වම් පැත්ත = දකුණු පැත්ත

ඒ අනුව, $m = 6$ හා $n = -3$ යන විසඳුම නිවැරදි ය.

13.1 අභ්‍යාසය

1. විසඳන්න.

(a) $\frac{3}{5}a + \frac{1}{3}b = 3$
$\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b = 8$

(b) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}y = 9$
$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = 2$

(c) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 4$
$\frac{1}{2}x - y = 1$

(d) $\frac{2}{7}p - \frac{1}{3}q = 5$
$\frac{1}{2}p - 1\frac{2}{3}q = 12$

(e) $\frac{m}{4} + \frac{5n}{3} = 36$
$\frac{3m}{8} - \frac{5n}{12} = -2$

(f) $\frac{2x}{3} + \frac{3y}{2} = -1$
$4x - 5y = 22$

2. පාසලක පැවති උත්සවයක, සංග්‍රහය සඳහා වැය වන මුදලින් $\frac{1}{2}$ ක්ද සැරසිලි සඳහා වැය වන මුදලින් $\frac{1}{3}$ ක් ද දැරීමට ආදිශිෂ්‍ය සංගමය විසින් එකඟ විය. ඒ අනුව ආදිශිෂ්‍ය සංගමයෙන් ලබාදුන් මුදල රුපියල් 20 000කි. සංග්‍රහ හා සැරසිලි සඳහා වැයවන ඉතිරි මුදල සුභ සාධක සංගමය මගින් දරන ලදි. ඒ අනුව සුභසාධක සංගමය රුපියල් 30 000ක් ලබා දුනි.

(i) සංග්‍රහ කටයුතු සඳහා වියදම් වූ මුදල රුපියල් x ද සැරසිලි සඳහා වියදම් වූ මුදල රුපියල් y ලෙස ද සලකා, මෙම තොරතුරු දැක්වීමට සමීකරණ යුගලයක් ලියන්න.

(ii) එම සමගාමී සමීකරණ යුගල විසඳා, සංග්‍රහ කටයුතු හා සැරසිලි සඳහා වියදම් වූ මුදල් ප්‍රමාණ වෙන වෙන ම සොයන්න.

13.2 සාධක භාවිතයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම

$ax^2 + bx + c = 0$ ආකාරයේ වර්ගජ සමීකරණයක විසඳුම් (එනම්, මූල) සොයන ආකාරය මීට පෙර ඔබ උගෙන ඇත. එවැනි උදාහරණ කීපයක් පුනරීක්ෂණය කරමු.

නිදසුන 1

$x^2 - 5x + 6 = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල සොයන්න.

$(x - 2)(x - 3) = 0$ (සාධක සෙවීමෙන්)

$\therefore x - 2 = 0$ හෝ $x - 3 = 0$ විය යුතු ය.

$\therefore x = 2$ හෝ $x = 3$

$\therefore x = 2$ හා $x = 3$ මෙම සමීකරණයේ විසඳුම් වේ.

නිදසුන 2

$2x^2 + 3x - 9 = 0$ හි මූල සොයන්න.

$$2x^2 + 6x - 3x - 9 = 0$$
$$2x(x + 3) - 3(x + 3) = 0$$
$(2x - 3)(x + 3) = 0$ (සාධක සෙවීමෙන්)

$2x - 3 = 0$ හෝ $x + 3 = 0$ විය යුතු ය.

$x = \frac{3}{2}$ හෝ $x = -3$

$x = 1\frac{1}{2}$ හා $x = -3$ මෙම සමීකරණයේ මූල වේ.

දැන් තරමක් සංකීර්ණ ගැටලුවක් විසඳමු.

නිදසුන 3

$\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{3x+2} = 1$ හි මූල සොයන්න.

මෙහි වර්ගජ සමීකරණයක් පෙනෙන්නට නැත. එහෙත්, මෙම සමීකරණය භාග රහිත සමීකරණයකට හැරවූ විට වර්ගජ සමීකරණයක් ලැබේ. ඒ සඳහා, මුලින් ම, සමීකරණයේ වම්පස පොදු හරය සලකමු (මුළු සමීකරණයම $2x - 1$හි හා $3x + 2$ හි කුඩා පොදු ගුණාකාරයෙන් ගුණ කිරීමෙන් ද මෙය කළ හැකි ය).

$\frac{3(3x+2) - 2(2x-1)}{(2x-1)(3x+2)} = 1$ (වම් පස තනි භාගයක් ලෙස ලිවීමෙන්)

$3(3x + 2) - 2(2x - 1) = (2x - 1)(3x + 2)$ (හරස් ගුණිතයෙන්)

$9x + 6 - 4x + 2 = 6x^2 + 4x - 3x - 2$ (ප්‍රසාරණය කිරීමෙන්)

$6x^2 - 4x - 10 = 0$ (සුළු කිරීමෙන්)

$3x^2 - 2x - 5 = 0$ (සමීකරණයේ සියලු පද 2න් බෙදීමෙන්)

$$3x^2 - 5x + 3x - 5 = 0$$
$$x(3x - 5) + 1(3x - 5) = 0$$
$$(3x - 5)(x + 1) = 0$$

$\therefore 3x - 5 = 0$ හෝ $x + 1 = 0$ මෙම සමීකරණ

$\therefore x = \frac{5}{3}$ හෝ $x = -1$

$\therefore x = 1\frac{2}{3}$ හෝ $x = -1$

$\therefore x = 1\frac{2}{3}$ හා $x = -1$ මෙම සමීකරණයේ මූල වේ.

නිදසුන් කීපයක් මගින් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම පුනරීක්ෂණය කළ අපි දැන් වර්ගජ සමීකරණ භාවිතයෙන් විසඳිය හැකි ගැටලුවක් පිළිබඳ ව විමසා බලමු.

නිදසුන 4

අනුයාත නිඛිල දෙකක ගුණිතය 12 වේ. එම සංඛ්‍යා යුගල සොයන්න.

මෙම ගැටලුව විසඳීම සඳහා වර්ගජ සමීකරණයක් යොදා ගන්නා ආකාරය විමසා බලමු. අනුයාත සංඛ්‍යා දෙකෙන් කුඩා සංඛ්‍යාව x ලෙස ගනිමු. එවිට, අනෙක් සංඛ්‍යාව $x + 1$ වේ. ඒ අනුව,

අනුයාත සංඛ්‍යා යුගලය x හා $(x + 1)$ ලෙස ගත හැකි ය.

මෙම සංඛ්‍යා දෙකේ ගුණිතය 12 බැවින්

$x \times (x + 1) = 12$ ලෙස ලිවිය හැකි වේ.

$\therefore\ x^2 + x - 12 = 0$

මෙහි වම් පස සාධක සෙවූ විට,

$(x - 3)\,(x + 4) = 0$ වේ.

$\therefore\ x - 3 = 0$ හෝ $x + 4 = 0$ විය යුතු ය.

$\therefore\ x = 3$ හෝ $x = -4$

$x = 3$ හා $x = -4$ ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම වේ.

$x = 3$ විට අනුයාත සංඛ්‍යාව $(x + 1) = 3 + 1 = 4$ වේ.

$x = -4$ විට අනුයාත සංඛ්‍යාව $(x + 1) = -4 + 1 = -3$ වේ.

මේ අනුව ගුණිතය 12 වන අනුයාත නිඛිල සංඛ්‍යා යුගල දෙකක් ඇති අතර, ඒවා "3, 4" හා "– 3, – 4" වේ.

ඉහත $x^2 + x - 12 = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ විසඳුම් එම සමීකරණයට ආදේශ කර, එම විසඳුම් සත්‍ය බව වටහා ගත හැකි වේ.

$x^2 + x - 12 = 0$

$x = 3$ සමීකරණයේ වම් පැත්තට ආදේශ කරමු.

$$
\begin{aligned}
\text{ව.පැ.} &= x^2 + x - 12 \\
&= 3^2 + 3 - 12 \\
&= 9 + 3 - 12 \\
&= 12 - 12 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\therefore$ ව.පැ. = ද.පැ.

$x = -4$ සමීකරණයේ වම් පැත්තට ආදේශ කරමු.

$$
\begin{aligned}
\text{ව.පැ.} &= x^2 + x - 12 \\
&= (-4)^2 + (-4) - 12 \\
&= 16 - 4 - 12 \\
&= 16 - 16 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\therefore$ ව.පැ. = ද.පැ.

මේ අනුව $x^2 + x - 12 = 0$ සමීකරණයේ විසඳුම් 3 හා -4 බව සනාථ වේ.

නිදසුන 5

සෘජුකෝණාස්‍රාකාර ඉඩමක දිග එහි පළලට වඩා මීටර 5ක් දිගින් වැඩි වේ. එහි වර්ගඵලය වර්ගමීටර 150 කි.

(i) ඉඩමේ පළල මීටර x ලෙස ගෙන ඉඩමේ දිග සඳහා ප්‍රකාශනයක් x ඇසුරෙන් ලියන්න.

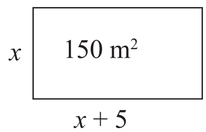
(ii) x අඩංගු සමීකරණයක් ගොඩනගන්න.

(iii) එම සමීකරණය විසඳා, ඉඩමේ දිග හා පළල සොයන්න.

(i) පළල මීටර x ලෙස ගනිමු. එවිට,

දිග $= x + 5$ වේ. (සියලු මිනුම් මීටරවලින් දක්වා ඇත)

(ii) මෙම දත්ත රූපසටහනකින් නිරූපණය කළ විට වඩාත් පැහැදිලි වේ.



$$\text{වර්ගඵලය} = \text{දිග} \times \text{පළල}$$
$$= (x + 5) \times x$$
$$x\,(x + 5) = 150$$

මෙය අවශ්‍ය සමීකරණය යි.

(iii) ඉහත සමීකරණය විසඳමු.

$$x\,(x + 5) = 150$$
$$x^2 + 5x - 150 = 0$$
$$(x - 10)\,(x + 15) = 0$$
$$\therefore\ x - 10 = 0 \text{ හෝ } x + 15 = 0$$
$$\therefore\ x = +10 \text{ හෝ } x = -15$$

$\therefore\ x = +\,10$ හා $x = -\,15$ මෙම සමීකරණයේ මූල වේ.

එහෙත් x මගින් දිගක් නිරූපණය වන බැවින් එය සෘණ විය නොහැකි ය.

එබැවින් $x = 10$ අගය පමණක් ගැළපේ.

ඒ අනුව සෘජුකෝණාස්‍රාකාර ඉඩමේ පළල $= 10$ m ද

සෘජුකෝණාස්‍රාකාර ඉඩමේ දිග $= 15$ m ද වේ.

ඉහත x සඳහා ලැබුණු අගය දෙක ආදේශයෙන් $x\,(x + 5) = 150$ හි විසඳුම් 10 හා -15 බව සනාථ කළ හැකි ය.

$$\text{ව.පැ.} = x\,(x + 5)$$
$$= 10\,(10 + 5)$$
$$= 10 \times 15$$
$$= 150$$
$$\therefore\ \text{ව.පැ.} = \text{ද.පැ.}$$

මෙලෙස ම, $x = -15$ ද විසඳුමක් බව සනාථ කළ හැකි ය.

13.2 අභ්‍යාසය

1. පහත සඳහන් එක් එක් වර්ගජ සමීකරණය විසඳන්න.

(a) $x\,(x+5)=0$ **(b)** $\frac{3}{4}\,x\,(x+1)=0$ **(c)** $(x-4)\,(x+3)=0$

(d) $x^2-2x=0$ **(e)** $\frac{x^2}{2}=3x$ **(f)** $x^2+7x+12=0$

(g) $(x-2)\,(2x+3)=x^2+2x+4$ **(h)** $\frac{4}{x}+\frac{3}{x+1}=3$

(i) $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=1$ **(j)** $x^2-4=0$

2. පහත සඳහන් එක් එක් වර්ගජ සමීකරණය සාධක දැනුම භාවිතයෙන් විසඳන්න.

($\sqrt{2}=1.41$, $\sqrt{3}=1.73$ හා $\sqrt{5}=2.23$ ලෙස ගන්න)

(a) $x^2-12=0$ **(b)** $x^2-21=11$ **(c)** $x^2+17=37$

3. යම් සංඛ්‍යාවක වර්ගයෙන්, එම සංඛ්‍යාවේ දෙගුණය අඩු කළ විට පිළිතුර 15 වේ. එම සංඛ්‍යාව සොයන්න.

4. අනුයාත ඉරට්ට සංඛ්‍යා දෙකක ගුණිතය 120 වේ. සංඛ්‍යා දෙක සොයන්න.

5. සෘජුකෝණාස්‍රාකාර ආස්තරයක දිග, එහි පළලට වඩා සෙන්ටිමීටර 3කින් විශාල ය. එම ආස්තරයේ වර්ගඵලය වර්ග සෙන්ටිමීටර 88 කි. ආස්තරයේ දිගත් පළලත් සොයන්න.

6. සෘජුකෝණාස්‍රාකාර තණ පිටියක දිග 32 m හා පළල 20 m ද වන අතර, එය වටා පිටතින් ඒකාකාර පළලින් යුතු පාරක් ඇත. පාරේ වර්ගඵලය 285 m^2ක් වේ.

(i) පාරේ පළල මීටර x ලෙස ගෙන, දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් x අඩංගු සමීකරණයක් ගොඩනගන්න.

(ii) එම සමීකරණය විසඳීමෙන් පාරේ පළල සොයන්න.

7. සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක කර්ණයේ දිග සෙන්ටිමීටර $(2x+1)$ වේ. අනෙක් පාද දෙකේ දිග පිළිවෙළින් සෙන්ටිමීටර x හා සෙන්ටිමීටර $(x+7)$ වේ. x හි අගය සොයා, ත්‍රිකෝණයේ පාදවල දිග සොයන්න.

8. $-7, -5, -3, -1, \ldots$ යන සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද n ගණනක ඓක්‍යය 105 වේ. ශ්‍රේඪි පිළිබඳ දැනුම භාවිතයෙන්

(i) n හි වර්ගජ සමීකරණයක් ගොඩනගන්න.

(ii) ඉහත සමීකරණය විසඳීමෙන් පද ගණන සොයන්න.

13.3 වර්ග පූරණයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම

වර්ගජ සමීකරණ විසඳීමේ දී අදාළ ප්‍රකාශනය සාධකවලට වෙන් කිරීමෙන් විසඳුම් සොයන අයුරු අපි දුටුවෙමු. එහෙත් $x^2 + 3x + 5 = 0$, $2x^2 - 5x - 1 = 0$ වැනි වර්ගජ සමීකරණ, සාධක සෙවීම මගින් විසඳීම පහසු නො වේ. එබඳු සමීකරණවල මූල ලබා ගැනීම සඳහා වෙනත් ක්‍රමයක් යොදා ගැනීම පහසු ය. එක් ක්‍රමයක් නම්, ප්‍රකාශනය පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස සකස් කර විසඳීම යි. මෙය වර්ග පූරණයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම නම් වේ.

වර්ග පූරණයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීමට පෙර $x^2 + bx$ ප්‍රකාශනයක් වර්ගායිතයක් එනම්, පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස ප්‍රකාශ කිරීම ඉගෙන ගත් ආකාරය සිහිපත් කරමු.

ඒ සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකමෙහි යෙදෙන්න.

ක්‍රියාකාරකම

පහත සඳහන් ප්‍රකාශන පූර්ණ වර්ගයක් බවට පත් කිරීමට එකතු කළ යුතු නියත පදය ලියා ඒවා වර්ගායිත ලෙස සකසන්න (පළමු කොටස සාදා ඇත).

a. $x^2 + 6x + 9 \quad = (x + 3)^2$
b. $x^2 + 8x + \ldots \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots$
c. $x^2 - 14x + \ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$
d. $x^2 + 3x + \ldots \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots$

e. $(x + \ldots)^2 = x^2 + 8x + \ldots$
f. $(x + \ldots)^2 = x^2 + 2ax + \ldots$
g. $(x + b)^2 = x^2 + \ldots x + b^2$
h. $(x + m)^2 = x^2 + \ldots x + m^2$

මුලින් ම, සාධක භාවිතයෙන් ද විසඳිය හැකි වර්ගජ සමීකරණයක් වර්ග පූරණයෙන් විසඳන අයුරු සලකා බලමු.

නිදසුන 1

$x^2 + 2x - 3 = 0$ වර්ග පූරණයෙන් විසඳන්න.

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$x^2 + 2x = 3$$

වම් පැත්ත පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස ලිවීම සඳහා x හි සංගුණකයෙන් බාගයෙහි වර්ගය වන $+\,1$ එකතු කරමු. එවිට දකුණු පසට ද $+\,1$ එකතු කළ යුතු වේ.

$$x^2 + 2x + 1 = 3 + 1$$
$$(x + 1)^2 = 4$$

එමනිසා

$$x + 1 = \pm\sqrt{4}$$
$$x + 1 = \pm\,2$$
$$x = \pm\,2 - 1$$

එනම්, $x = +\,2 - 1$ හෝ $x = -\,2 - 1$

$x = 1$ හෝ $x = -\,3$

ඒ අනුව ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම් $x = 1$ හා $x = -\,3$ වේ.

දැන් තවත් නිදසුනක් සලකමු.

නිදසුන 2

$x^2 - 4x + 1 = 0$ සමීකරණය වර්ග පූරණයෙන් විසඳන්න.

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$
$$x^2 - 4x = -1$$
$$x^2 - 4x + 4 = -1 + 4$$
$$(x-2)^2 = 3$$
$$\therefore \quad x - 2 = \pm\sqrt{3}$$
$$x = 2 \pm\sqrt{3}$$

$x = 2 + \sqrt{3}$ හෝ $x = 2 - \sqrt{3}$ වේ.

$\sqrt{3}$ සඳහා ආසන්න අගයක් ලෙස 1.73 දී ඇතැයි ගනිමු.

$x = 2 + 1.73$ හෝ $x = 2 - 1.73$ විය යුතු ය.

$x = 3.73$ හෝ $x = 0.27$

$x = 3.73$ හා $x = 0.27$ ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම් වේ.

නිදසුන 3

$2x^2 + 6x - 5 = 0$ විසඳා මූල සොයන්න.

මෙම සමීකරණය පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස දැක්වීමේ දී x හි සංගුණකය 1 ලෙස සකසා ගැනීමෙන් වඩාත් පහසු වේ. සමීකරණය 2න් බෙදීමෙන් වර්ග පදයේ සංගුණකය 1 ලෙස පිළියෙල කර ගත හැකි ය.

$$2x^2 + 6x - 5 = 0$$
$$x^2 + 3x - \frac{5}{2} = 0$$
$$x^2 + 3x = \frac{5}{2}$$
$$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{4}$$
$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{+10 + 9}{4}$$
$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{+19}{4}$$
$$x + \frac{3}{2} = \frac{\pm\sqrt{19}}{2}$$

$x = \dfrac{+\sqrt{19} - 3}{2}$ හෝ $x = \dfrac{-\sqrt{19} - 3}{2}$

$\sqrt{19}$ සඳහා ආසන්න අගයක් ලෙස 4.36 දී ඇතැයි ගනිමු.

$$x = \frac{4.36 - 3}{2} \text{ හෝ } x = \frac{-4.36 - 3}{2}$$

$x = 0.68$ හෝ $x = -3.68$

$x = 0.68$ හා $x = -3.68$ ඉහත සමීකරණයේ මූල වේ.

13.3 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන වර්ගජ සමීකරණ වර්ග පූරණයෙන් විසඳන්න.

($\sqrt{2} = 1.41$, $\sqrt{3} = 1.73$, $\sqrt{5} = 2.23$, $\sqrt{6} = 2.44$, $\sqrt{13} = 3.6$, $\sqrt{17} = 4.12$, හා $\sqrt{57} = 7.54$ ලෙස ගන්න)

(a) $x^2 - 2x - 4 = 0$ **(b)** $x^2 + 8x - 2 = 0$ **(c)** $x^2 - 6x = 4$

(d) $x^2 + 4x - 8 = 0$ **(e)** $x(x + 8) = 8$ **(f)** $x^2 + x = 4$

(g) $2x^2 + 5x = 4$ **(h)** $3x^2 = 3x + \frac{1}{2}$ **(i)** $\frac{2}{x+3} + \frac{1}{2x+3} = 1$

13.4 සූත්‍රය භාවිතයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම

$ax^2 + bx + c = 0$ ආකාරයේ වර්ගජ සමීකරණයක් විසඳීම සඳහා වඩාත් පහසු ක්‍රමයක් වන්නේ සූත්‍රය භාවිත කිරීම යි. මුලින් ම, මූල ලබා දෙන සූත්‍රය ලබා ගන්නා ආකාරය සලකා බලමු. ඇත්ත වශයෙන් ම, මෙහි දී සිදු කරන්නේ $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණය වර්ග පූරණයෙන් විසඳීම යි.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} \quad (a \text{ මගින් බෙදීමෙන්}) \ (a \neq 0)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad (\text{දෙපසට } \frac{b}{a} \text{ න් අඩක වර්ගය එකතු කිරීමෙන්})$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \quad (\text{වම් පස පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස ලියා, දකුණු පස පද සැකසීමෙන්})$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (\text{දකුණු පස පොදු හරයක් ලෙස ලිවීමෙන්})$$

එමනිසා, $$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ (පොදු හරයක් සහිත ව ලිවීමෙන්)

මේ අනුව
$ax^2 + bx + c = 0$ ආකාරයේ වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම සඳහා

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$ යන සූත්‍රය භාවිත කළ හැකි වේ. මෙහි ධන හා ඍණ අගයන් දෙකට අනුරූප ව x සඳහා අගයන් (මූල) දෙකක් ලැබේ.
මෙහි a යනු x^2 පදයේ සංගුණකය ද, b යනු x පදයේ සංගුණකය ද, c යනු නියත පදය ද වේ.

නිදසුන 1

$2x^2 + 7x + 3 = 0$ සමීකරණය සූත්‍රය භාවිතයෙන් විසඳන්න.

$2x^2 + 7x + 3 = 0$ සමීකරණයෙහි,
$a = 2, b = 7, c = 3$ ආදේශයෙන්

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$= \frac{-7 \pm 5}{4}$$

$x = \frac{-7 + 5}{4}$ හෝ $x = \frac{-7 - 5}{4}$

$x = -\frac{1}{2}$ හෝ $x = -3$

$x = -\frac{1}{2}$ හා $x = -3$ ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම් වේ.

නිදසුන 2

$4x^2 - 7x + 2 = 0$ සමීකරණය සූත්‍රය භාවිතයෙන් විසඳා මූල සොයන්න. $\sqrt{17} = 4.12$ ලෙස ගන්න.

$$4x^2 - 7x + 2 = 0$$

මෙහි $a = 4, b = -7, c = 2$ ලෙස ගත හැකි ය. ($ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයට අනුව)

ඒ අනුව, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 4 \times 2}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 32}}{8}$$

$= \dfrac{7 \pm \sqrt{17}}{8}$ ($\sqrt{17} = 4.12$ ලෙස දී ඇති නිසා)

$$= \frac{7 \pm 4.12}{8}$$

$x = \dfrac{7 + 4.12}{8}$ හෝ $x = \dfrac{7 - 4.12}{8}$

$x = \dfrac{11.12}{8}$ හෝ $x = \dfrac{2.88}{8}$

$x = 1.39$ හෝ $x = 0.36$

$x = 1.39$ හා $x = 0.36$ ඉහත සමීකරණයේ මූල වේ.

නිදසුන 3

$x^2 + 2x - 1 = 0$ සමීකරණය සූත්‍රය භාවිතයෙන් විසඳා, මූල දෙවන දශමස්ථානයට නිවැරදි ව සොයන්න ($\sqrt{2} = 1.414$ ලෙස ගන්න).

$a = 1, b = 2, c = -1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 \times 2}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2 \times 1.414}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2.828}{2}$$

$x = \frac{-2 + 2.828}{2}$ හෝ $x = \frac{-2 - 2.828}{2}$

$= \frac{0.828}{2}$ $\qquad x = \frac{-4.828}{2}$

$x = 0.414$ හෝ $x = -2.414$

$x = 0.41$ හා $x = -2.41$ ඉහත සමීකරණයේ මූල වේ.

13.4 අභ්‍යාසය

1. සූත්‍රය භාවිතයෙන් පහත සඳහන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳා, පිළිතුර ආසන්න පළමු දශම ස්ථානයට තබන්න.
($\sqrt{3} = 1.73$, $\sqrt{17} = 4.12$ හා $\sqrt{29} = 5.38$ ලෙස ගන්න)

(a) $x^2 - 6x - 3 = 0$ **(b)** $x^2 - 7x + 5 = 0$ **(c)** $2x^2 - x - 2 = 0$

(d) $2x^2 - 5x + 1 = 0$ **(e)** $3x^2 - 4x - 7 = 0$

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

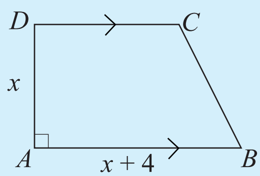
1. ධන සංඛ්‍යාවක වර්ගයෙන් එම සංඛ්‍යාවේ තුන් ගුණය අඩු කළ විට 28කි. එම සංඛ්‍යාව සොයන්න.

2. අනුයාත ඔත්තේ සංඛ්‍යා දෙකක ගුණිතය 99 වේ. සංඛ්‍යා දෙක සොයන්න.

3. සෘජුකෝණාස්‍රාකාර තහඩු කැබැල්ලක දිග, එහි පළලට වඩා 6 cmක් වැඩි වේ. තහඩුවේ වර්ගඵලය 44 cm^2 වේ. පළල x cm ලෙස ගෙන

(i) දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් x හි වර්ගජ සමීකරණයක් ගොඩනගන්න.

(ii) සූත්‍රය භාවිතයෙන් එම සමීකරණය විසඳා, x හි අගය ආසන්න පළමු දශම ස්ථානයට සොයන්න. ($\sqrt{53} = 7.28$ ලෙස ගන්න)

4. 

$ABCD$ ත්‍රපීසියමකි. එහි $AD = CD$ වේ.

(i) ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය 12 cm^2 නම් $x^2 + 2x - 12 = 0$ මගින් x හි අගය සපුරාලන බව පෙන්වන්න.

(ii) වර්ග පූරණයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් ඉහත (i) හි වර්ගජ සමීකරණය විසඳා, x හි අගය ආසන්න පළමු දශම ස්ථානයට සොයන්න.

5. අනුයාත ප්‍රකෘති සංඛ්‍යා තුනක වර්ගවල ඓක්‍යය 149කි. එම සංඛ්‍යා තුනෙහි මැද සංඛ්‍යාව x යැයි ගෙන, වර්ගජ සමීකරණයක් ගොඩනගා, එය විසඳා එමගින් විශාල ම සංඛ්‍යාව සොයන්න.

6. සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක සෘජුකෝණය අඩංගු පාද දෙකෙහි දිග සෙන්ටිමීටර $5x$ හා සෙන්ටිමීටර $(3x - 1)$ වේ. මෙහි වර්ගඵලය 60 cm^2 නම් x ඇසුරෙන් වර්ගජ සමීකරණයක් ගොඩනගා, එය විසඳා, එමගින් ත්‍රිකෝණයේ පාදවල දිග සොයන්න.

7. මිනිසෙක් රුපියල් 600කට අඹ ගෙඩි ප්‍රමාණයක් මිලට ගත්තේ ය. අඹ ගෙඩියක මිල රුපියල් එකකින් අඩු වූයේ නම් ඔහුට තවත් අඹ ගෙඩි 20ක් වැඩිපුර ගත හැකි ව තිබිණි. මිලට ගත් අඹ ගෙඩි ගණන සොයන්න.

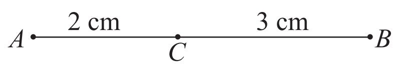
14 සමකෝණික ත්‍රිකෝණ

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- සමරූපී හා සමකෝණික රූප යන්නෙහි අදහස තේරුම් ගැනීමට
- "ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයකට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාවකින් ඉතිරි පාද දෙක සමානුපාතික ව බෙදේ" යන ප්‍රමේයය හඳුනා ගැනීමට
- "ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක් සරල රේඛාවක් මගින් සමානුපාතික ව බෙදයි නම්, එම සරල රේඛාව, ඉතිරි පාදයට සමාන්තර වේ" යන විලෝම ප්‍රමේයය හඳුනා ගැනීමට
- "සමකෝණික ත්‍රිකෝණවල අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ" යන ප්‍රමේයය හඳුනා ගැනීමට
- "ත්‍රිකෝණ දෙකක අනුරූප පාද සමානුපාතික නම්, එම ත්‍රිකෝණ දෙක සමකෝණික වේ" යන විලෝම ප්‍රමේයය හඳුනා ගැනීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

දිග අතර අනුපාත



$AC = 2$ cm හා $CB = 3$ cm වන සේ AB මත C ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇති AB සරල රේඛා ඛණ්ඩයක් රූපයේ දැක්වේ. C මගින් AB රේඛා ඛණ්ඩය AC හා CB ලෙස කොටස් දෙකකට බෙදී ඇත.

එවිට, AC හා CB පාද අතර අනුපාතය, ඒවායේ දිග ඇසුරෙන් මෙසේ ලිවිය හැකි ය.

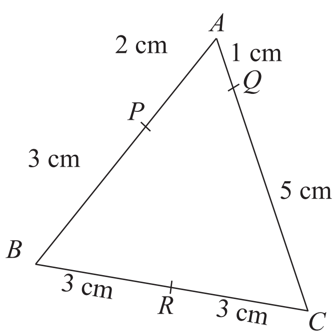
$AC : CB = 2 : 3$

එසේ ම, $AC : AB = 2 : 5$ ($AB = 5$ cm නිසා) ලෙස ද

$CB : AC = 3 : 2$ ලෙස ද

$CB : AB = 3 : 5$ ලෙස ද ලිවිය හැකි ය.

අනුපාතය සඳහා සම්බන්ධ කර ගන්නා පාදවල පිළිවෙළට ඒවායේ දිග අතර අනුපාතය ද ලිවිය යුතු ය. පහත රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණය සලකන්න.



රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයේ එක් එක් පාද මත එහි දක්වා ඇති ආකාරයට P, Q හා R ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇති විට, පහත දැක්වෙන අයුරින් අනුපාත ලිවිය හැකි ය.

(i) $AP : PB = 2 : 3$, $AP : AB = 2 : 5$, $PB : AP = 3 : 2$

(ii) $AQ : QC = 1 : 5$, $AQ : AC = 1 : 6$, $QC : AQ = 5 : 1$

(iii) $BR : RC = 3 : 3 = 1 : 1$, $BR : BC = 3 : 6 = 1 : 2$

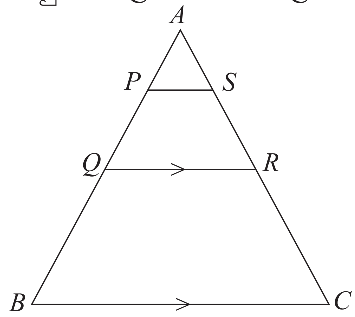
අනුපාත ඇසුරෙන් භාග ද ලිවිය හැකි බව අපි උගෙන ඇත්තෙමු. ඒ අනුව, ඉහත දැක්වෙන $AQ : QC = 1 : 5$ යන්න $\frac{AQ}{QC} = \frac{1}{5} = 0.2$ ලෙස ද ලිවිය හැකි ය.

14.1 ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක්, ඉතිරි පාදයට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාවකින් බෙදීම

ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක් කැපී යන සේ ඉතිරි පාදයට සමාන්තර ව අඳින රේඛාවෙන් එම පාද දෙක බෙදෙන අනුපාත පිළිබඳ ව සොයා බැලීමට පහත ක්‍රියාකාරකමේ යෙදෙමු.

ක්‍රියාකාරකම

- $AB = 6$ cm ද, ඉතිරි පාද දෙක ඕනෑ ම දිගක් ද වන පරිදි ත්‍රිකෝණයක් අඳින්න.
- $AP = 2$ cm හා $AQ = 3$ cm වන පරිදි P හා Q ලක්ෂ්‍ය දෙක, AB මත ලකුණු කරන්න.
- විහිත චතුරස්‍රය භාවිතයෙන් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් BCට සමාන්තර රේඛාවක් Q හරහා ඇඳ, එය AC රේඛාව හමු වන ලක්ෂ්‍යය R ලෙස නම් කරන්න.



- AR හා RC මැන ගන්න.
- BC ට සමාන්තර තවත් රේඛාවක් P හරහා පෙර පරිදි ම ඇඳ, එය AC රේඛාව හමුවන ලක්ෂ්‍යය S ලෙස නම් කරන්න.
- AS හා SC මැන ගන්න.
- දැන් පහත වගුව සම්පූර්ණ කරන්න.

අවස්ථාව	AB පාදයේ කොටස් අතර අනුපාතය	AC පාදයේ කොටස් අතර අනුපාතය	අනුපාත දෙක අතර සම්බන්ධතාව
Q හරහා සමාන්තර රේඛාව	$\frac{AQ}{QB} = \frac{3}{3} = 1$	$\frac{AR}{RC} =$	
P හරහා සමාන්තර රේඛාව	$\frac{AP}{PB} = \frac{2}{4} = 0.5$	$\frac{AS}{SC} =$	

- මේ ආකාරයට, සෘජුකෝණික හා මහා කෝණික ත්‍රිකෝණ සඳහා ද, පාදයකට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාවකින් ඉතිරි පාද දෙක බෙදී යන අනුපාත අතර සම්බන්ධතාව පරීක්ෂා කරන්න.

ඔබට ලැබුණු ප්‍රතිඵල පහත දැක්වෙන වගන්තිය සමඟ ගැළපේ දැයි බලන්න.

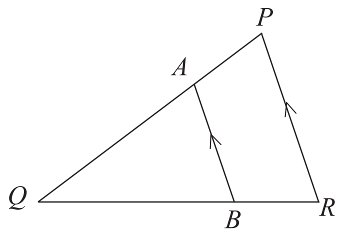
ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයකට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාවකින් ඉතිරි පාද දෙක බෙදෙන්නේ ද සමාන අනුපාත ඇති ව යි.

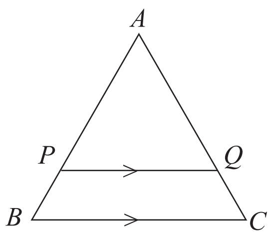
ඉහත ලබා ගත් ප්‍රතිඵලය, ජ්‍යාමිතික ප්‍රමේයයක් ලෙස මෙසේ දැක්විය හැකි ය.

ප්‍රමේයය:
ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයකට සමාන්තර ව අඳින ලද සරල රේඛාවක් එහි ඉතිරි පාද දෙක සමානුපාතික ව බෙදයි.

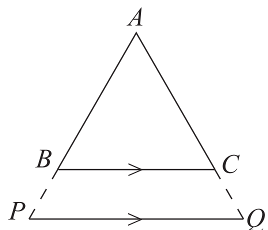
නිදසුනක් ලෙස, රූපයේ දැක්වෙන PQR ත්‍රිකෝණයේ, PR පාදයට සමාන්තර ව AB ඇඳ තිබේ.
එවිට, ප්‍රමේයය අනුව,

(i) $QA : AP = QB : BR$ එනම්, $\frac{QA}{AP} = \frac{QB}{BR}$ වේ.

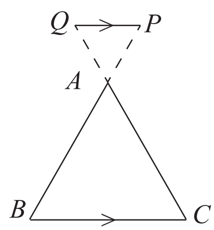




(i) රූපය



(ii) රූපය



(iii) රූපය

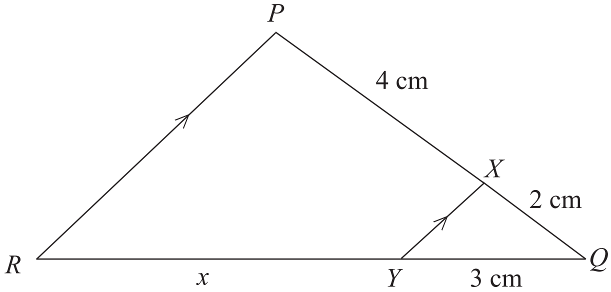
ඉහත (i) රූපයේ AB හා AC පාද අභ්‍යන්තර ව බෙදී යන සේ, BCට සමාන්තර ව PQ ඇඳ ඇත. එහෙත්, (ii) හා (iii) රූපවල BCට සමාන්තර වූ PQ රේඛාව, ත්‍රිකෝණයේ දික් කළ අනෙක් පාද දෙක P හා Q හි දී හමු වේ. මෙවැනි අවස්ථාවල දී PQ මගින් AB හා AC පාද බාහිර ව ඡේදනය වේ යැයි කියනු ලැබේ. මෙසේ එක් එක් පාදය බාහිරින් හෝ අභ්‍යන්තරයෙන් හෝ බෙදනු ලැබුව ද, ඉහත ප්‍රමේයය වලංගු වේ. එනම්,

ඉහත රූප තුන ම සඳහා $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ වේ.

දැන් මෙම ප්‍රමේයය යොදා ගෙන කරන ලද ගණනය කිරීම් ඇතුළත් පහත නිදසුන් බලන්න.

නිදසුන 1

PQR ත්‍රිකෝණයේ, *PR* පාදයට සමාන්තර ව *XY* ඇඳ තිබේ. $PX = 4$ cm ද $XQ = 2$ cm, $YQ = 3$ cm ද නම්, *RY* හි දිග සොයන්න.



RY හි දිග *x* ලෙස ගනිමු.
එවිට, *PR*ට සමාන්තර ව *XY* ඇඳ ඇති නිසා, ප්‍රමේයයට අනුව,

$$\frac{RY}{YQ} = \frac{PX}{XQ}$$

එනම් $\frac{x}{3} = \frac{4}{2}$

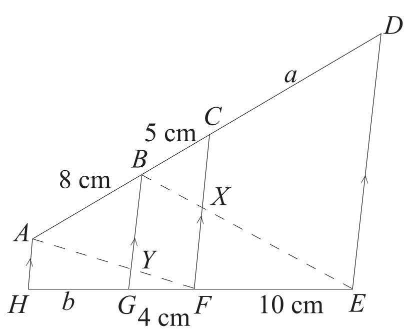
$\therefore \quad 2x = 4 \times 3$

$\therefore \quad x = 6$

$\therefore$ *RY* හි දිග 6 cm වේ.

නිදසුන 2

රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව *a* හා *b* මගින් දැක්වෙන අගය සොයන්න.



මුලින් ම *BE* යා කරමු.
BED ත්‍රිකෝණයේ, *DE*//*CX* නිසා, ප්‍රමේයයට අනුව *CX* මගින්, *BD* හා *BE* පාද සමානුපාතික ව බෙදේ.

එනම්, $\dfrac{BC}{CD} = \dfrac{BX}{XE}$

එනම්, $\dfrac{5}{a} = \dfrac{BX}{XE}$ ——— ①

දැන්, BGE ත්‍රිකෝණයේ, $BG//XF$ නිසා ප්‍රමේයයට අනුව, EB හා EG පාද XF මගින් සමානුපාතික ව බෙදේ.

එනම්, $\dfrac{BX}{XE} = \dfrac{GF}{FE}$

එමනිසා, $\dfrac{BX}{XE} = \dfrac{4}{10}$ ——— ②

① හා ② සමීකරණ දෙකෙන්

$$\frac{5}{a} = \frac{4}{10}$$

එනම්, $4a = 50$

$$\therefore \quad a = \frac{50}{4}$$

$$= \underline{\underline{12.5 \text{ cm}}}$$

ඉහත ආකාරයට ම AF යා කිරීමෙන්,

ACF ත්‍රිකෝණයේ, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AY}{YF}$

$$\frac{8}{5} = \frac{AY}{YF} \text{ ——— ③}$$

AHF ත්‍රිකෝණයේ, $\dfrac{AY}{YF} = \dfrac{HG}{GF}$

$$\frac{AY}{YF} = \frac{b}{4} \text{ ——— ④}$$

③ හා ④ සමීකරණ දෙකෙන්,

$$\frac{b}{4} = \frac{8}{5}$$

$$5b = 32$$

$$\therefore \quad b = \frac{32}{5}$$

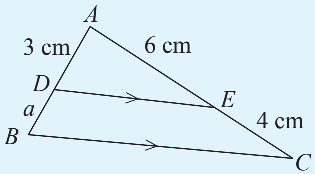
$$= \underline{\underline{6.4 \text{ cm}}}$$

දැන් පහත අභ්‍යාසයේ ඇතුළත් ගණනය කිරීම්වල යෙදෙමින්, උගත් කරුණු තහවුරු කර ගන්න.

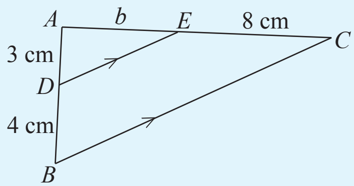
14.1 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් රූප සටහනේ සමහර සරල රේඛා ඛණ්ඩවල දිග අඥාත මගින් දක්වා ඇත. එම අඥාත මගින් දැක්වෙන අගය සොයන්න.

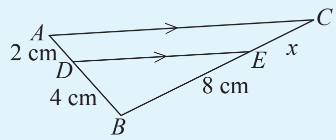
(i)



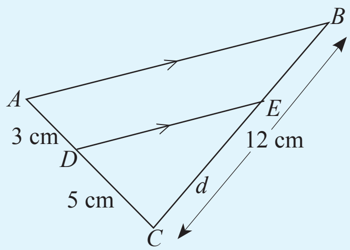
(ii)



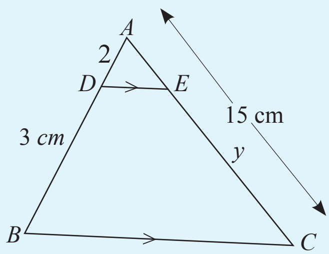
(iii)



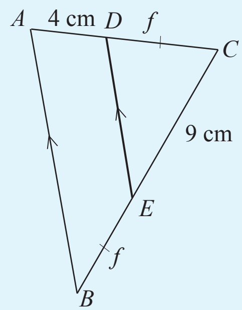
(iv)



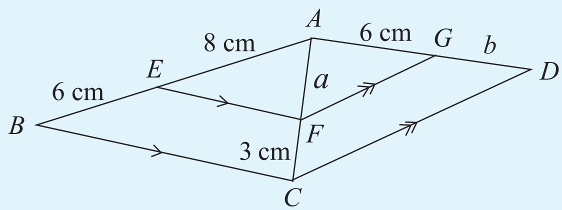
(v)



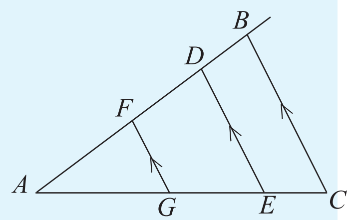
(vi)



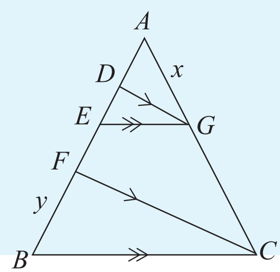
2. දී ඇති රූපයේ දී ඇති තොරතුරු හා මිනුම් අනුව, a හා b මගින් දැක්වෙන අගයන් සොයන්න.



3. දී ඇති රූපයේ $FG//DE//BC$ වේ. $AF = 6$ cm, $DB = 3$ cm, $AG = 8$ cm හා $GE = 8$ cm වේ. FD හා EC රේඛා ඛණ්ඩවල දිග වෙන වෙන ම සොයන්න.



4. දී ඇති $DG//FC$ හා $EG//BC$ වේ. $AD = 6$ cm, $DE = 4$ cm, $EF = 5$ cm හා $GC = 18$ cm වේ. x හා y මගින් දැක්වෙන අගය සොයන්න.

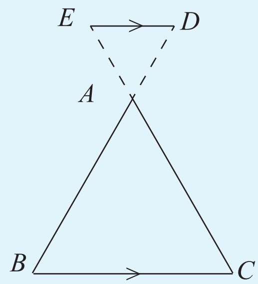


5. රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයේ දික් කරන ලද BA හා CA පාද BCට සමාන්තර ව ඇඳි ED රේඛාවෙන් බාහිරින් බෙදී ඇත. $AE = 2$ cm, $AD = 3$ cm හා $AC = 4$ cm වේ. AB රේඛා ඛණ්ඩයේ දිග x මගින් දැක්වේ.

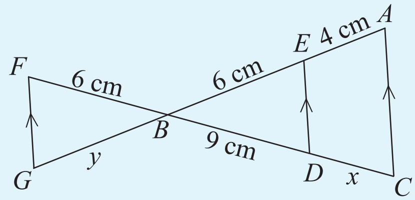
(i) හිස්තැන් සම්පූර්ණ කරන්න.

DB : .... = ... : EA

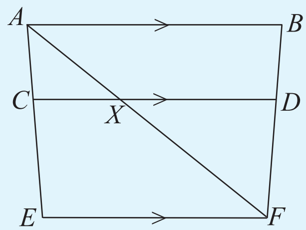
(ii) x මගින් දැක්වෙන අගය සොයන්න.



6. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව x හා y මගින් දැක්වෙන අගයන් සොයන්න.



7. දී ඇති රූපයේ $AB//CD//EF$ වේ. $AC = 3$ cm, $CE = 5$ cm හා $BF = 12$ cm වේ. BD හා DF හි අගයන් සොයන්න.



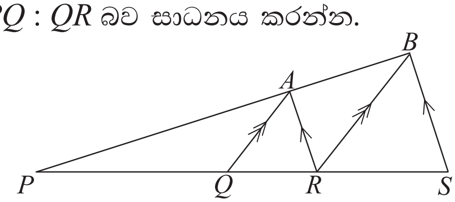
8. ABC ත්‍රිකෝණයේ $B\hat{C}A$ හි සමච්ඡේදකයට AB පාදය Xහි දී හමු වේ. $PX = PC$ වන සේ, P ලක්ෂ්‍යය, BC මත පිහිටා තිබේ. $PX = 9$ cm, $BX = 5$ cm හා $AX = 6$ cm නම් BC පාදයේ දිග සොයන්න.

14.2 ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක් සමානුපාතික ව බෙදීම තවදුරටත්

"ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයකට සමාන්තර ව අඳින ලද සරල රේඛාවක් එහි ඉතිරි පාද දෙක සමානුපාතික ව බෙදයි" යන ප්‍රමේයය යොදා ගෙන අනුමේයන් සාධනය කිරීම පිළිබඳ ව මෙම කොටසින් සාකච්ඡා කරමු.

නිදසුන 1

දී ඇති රූපයේ, $PQRS$ හා PAB සරල රේඛා වේ. $BS//AR$ සහ $BR//AQ$ වේ. $PR : RS = PQ : QR$ බව සාධනය කරන්න.



සාධනය : PBR ත්‍රිකෝණයේ, BR පාදයට AQ සමාන්තර නිසා, ප්‍රමේයයට අනුව,

$$PA : AB = PQ : QR \text{ ——— } (1)$$

PBS ත්‍රිකෝණයේ, BS පාදයට AR සමාන්තර නිසා, ප්‍රමේයයට අනුව,

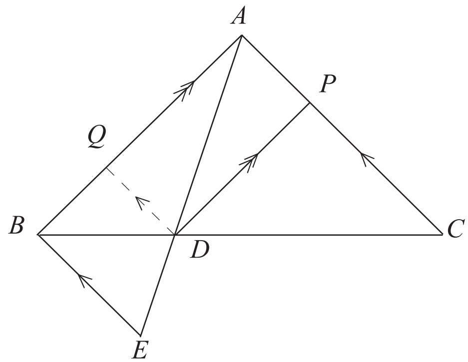
$$PA : AB = PR : RS \text{ ——— } (2)$$

(1) හා (2) න්

$$PR : RS = PQ : QR$$

නිදසුන 2

D යනු *ABC* ත්‍රිකෝණයේ *BC* පාදය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. දික් කළ *AD* රේඛාව *E* හි දී හමු වන සේ, *AC* ට සමාන්තර ව, *BE* ඇඳ තිබේ. *AB* ට සමාන්තර ව *D* සිට ඇඳි රේඛාවට *P* හි දී *AC* හමු වේ. $CP : PA = AD : DE$ බව සාධනය කරන්න.



මෙහි දී, ඉහත නිදසුනේ පරිදි ම, ත්‍රිකෝණ යුගලයකුත්, එම එක් එක් ත්‍රිකෝණයේ පාදයකට සමාන්තර රේඛාවකුත් තෝරා ගත යුතු ය. මේ සඳහා *ABE* ත්‍රිකෝණයත් *ABC* ත්‍රිකෝණයත් තෝරා ගනිමු. එසේ තෝරා ගන්නේ එම ත්‍රිකෝණ දෙකට ම පොදු පාදයක් තිබීම නිසා ය.

එහෙත් *ABE* ත්‍රිකෝණයේ පාදයකට සමාන්තර රේඛාවක් නැත. එමනිසා, එවැනි රේඛාවක් මුලින් ම නිර්මාණය කර ගනිමු.

නිර්මාණය : *AB* පාදය *Q* හි දී හමු වන සේ, *BE* ට සමාන්තර ව *DQ* ඇඳීම. (මෙවිට, *AC*, *QD* හා *BE* රේඛා එකිනෙකට සමාන්තර වේ.)

සාධනය :

ABC ත්‍රිකෝණයේ, AB පාදයට PD සමාන්තර නිසා, ප්‍රමේයයට අනුව,

$$CP : PA = CD : DB \text{ ——— } (1)$$

ABC ත්‍රිකෝණයේ, AC පාදයට QD සමාන්තර නිසා, ප්‍රමේයයට අනුව,

$$AQ : QB = CD : DB \text{ ——— } (2)$$

ABE ත්‍රිකෝණයේ, BE පාදයට QD සමාන්තර නිසා, ප්‍රමේයයට අනුව,

$$AQ : QB = AD : DE \text{ ——— } (3)$$

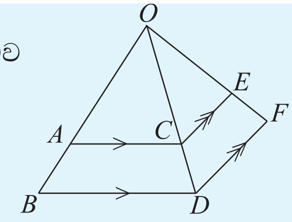
(1), (2) හා (3) සමීකරණවලින්,

$CP : PA = CD : DB = AQ : QB = AD : DE$ ලෙස ලැබේ.

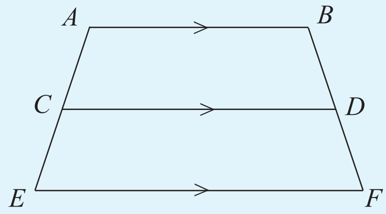
$$\therefore \quad CP : PA = AD : DE$$

14.2 අභ්‍යාසය

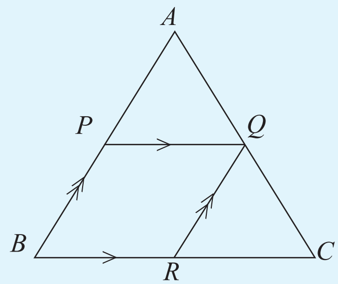
1. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව $OA : AB = OE : EF$ බව පෙන්වන්න.



2. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව $AC : CE = BD : DF$ බව සාධනය කරන්න.

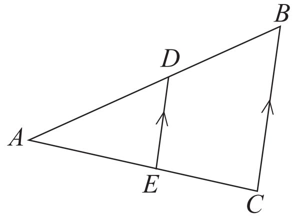


3. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව $AP : PB = BR : RC$ බව සාධනය කරන්න.



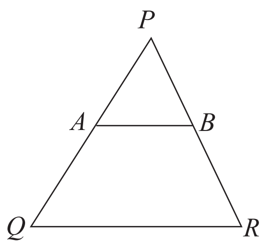
4. PQR ත්‍රිකෝණයේ, QR පාදය මත A ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත. PR ට සමාන්තර ව, A හරහා ඇඳි රේඛාව PQ පාදය B හි දී හමු වේ. AB රේඛාව C හි දී ද, PQ රේඛාව D හි දී ද කැපී යන සේ, R සිට RCD රේඛාව ඇඳ ඇත. $D\hat{B}C = B\hat{C}D$ නම්, $\frac{QA}{AR} = \frac{QB}{CR}$ බව සාධනය කරන්න.

14.3 ත්‍රිකෝණයක ඕනෑ ම පාදයකට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාවෙන් ඉතිරි පාද සමානුපාතික ව බෙදීමට සම්බන්ධ ප්‍රමේයයේ විලෝමය



ABC ත්‍රිකෝණයේ, BC පාදයට සමාන්තර ව ඇඳි DE රේඛාවෙන්, AB පාදය හා AC පාදය බෙදෙන්නේ එක ම අනුපාතයෙන් බව ඉහත ප්‍රමේයයෙන් නිගමනය වේ.

එනම්, $BC//DE$ නිසා, $AD : DB = AE : EC$ වේ. එම ප්‍රමේයයේ විලෝමය රූපයේ දැක්වෙන PQR ත්‍රිකෝණය අනුව තේරුම් ගනිමු.



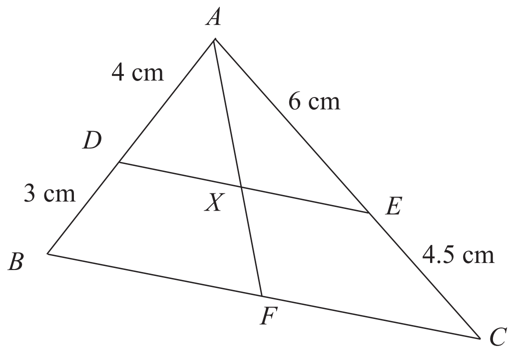
මෙහි PQ හා PR පාද දෙක AB රේඛාවෙන් ඡේදනය වී ඇත. එක් එක් පාදයේ වෙන් වූ කොටස් අතර අනුපාත $PA : AQ$ හා $PB : BR$ වේ.

මෙම අනුපාත දෙක සමාන වේ නම්, එනම් $PA : AQ = PB : BR$ වේ නම් එවිට, එම පාද දෙක ඡේදනය කරන රේඛාව වන AB, ඉතිරි පාදය වන QR පාදයට සමාන්තර වේ. මෙය, පාඩමේ මුලින් උගත් ප්‍රමේයයේ විලෝමය යි. එම ප්‍රතිඵලය මෙසේ ප්‍රමේයයක් ලෙස දැක්විය හැකි ය.

ඉහත ප්‍රමේයයේ විලෝමය:
සරල රේඛාවක් මගින් ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක් සමානුපාතික ව බෙදේ නම්, එම සරල රේඛාව, ත්‍රිකෝණයේ ඉතිරි පාදයට සමාන්තර වේ.

මෙම ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් ගණනය කිරීම් හා අනුමේයයන් සාධනය කිරීම් ඇතුළත් නිදසුන් කිහිපයක් පහත දැක්වේ.

නිදසුන 1



රූපයේ දී ඇති දත්ත අනුව $AX : XF$ හි අගය සොයන්න.

ABC ත්‍රිකෝණය සැලකූ විට, $AD : DB = 4 : 3$ ද

$AE : EC = 6 : 4.5 = 4 : 3$ ද නිසා

$AD : DB = AE : EC$ වේ.

$\therefore$ AB හා AC රේඛා DE රේඛාවෙන් සමානුපාතික ව බෙදී ඇත.

$\therefore$ ප්‍රමේයයේ විලෝමය අනුව $DE//BC$ වේ.

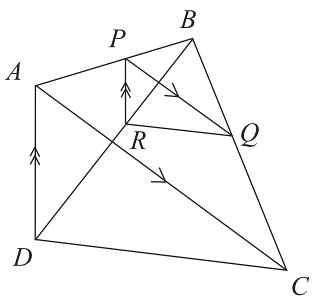
එවිට, ABF ත්‍රිකෝණයේ $DX//BF$ නිසා,

$AD : DB = AX : XF$

$AD : DB = 4 : 3$ නිසා,

$AX : XF = \underline{\underline{4 : 3}}$

නිදසුන 2



P ලක්ෂ්‍යය, $ABCD$ චතුරස්‍රයේ AB පාදය මත පිහිටා ඇත. AC ට සමාන්තර ව P හරහා ඇඳි රේඛාවට BC පාදය Q හි දී ද AD ට සමාන්තර ව P හරහා ඇඳි රේඛාවට BD රේඛාව R හි දී ද හමු වේ. $RQ//DC$ බව සාධනය කරන්න.

සාධනය :

ABD ත්‍රිකෝණයේ, AD පාදයට PR සමාන්තර නිසා,

$BP : PA = BR : RD$ ——— (1)

ABC ත්‍රිකෝණයේ, AC පාදයට PQ සමාන්තර නිසා,

$BP : PA = BQ : QC$ ——— (2)

(1) හා (2) සමීකරණවලින්

$BR : RD = BQ : QC$ ලෙස ලැබේ.

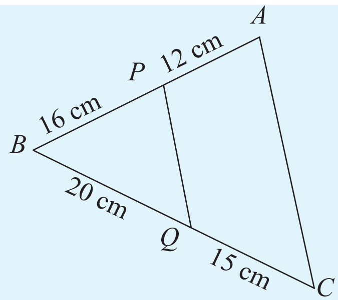
$\therefore$ BDC ත්‍රිකෝණයේ BD හා BC පාද RQ රේඛාවෙන් සමානුපාතික ව බෙදී ඇත.

$\therefore$ $RQ//DC$ (ප්‍රමේයයේ විලෝමය අනුව)

පහත අභ්‍යාස සඳහා ඉහත දක්වා ඇති විලෝම ප්‍රමේයය යොදා ගන්න.

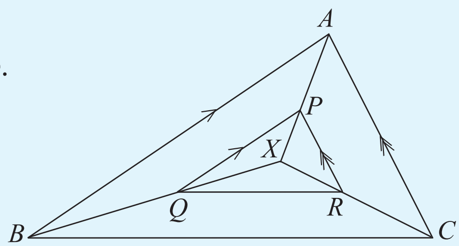
14.3 අභ්‍යාසය

1. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව AC, PQ ට සමාන්තර බව පෙන්වන්න.

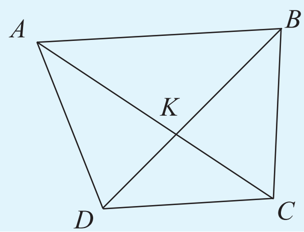


2. ABC ත්‍රිකෝණයේ $AP : PB = AQ : QC$ වන සේ, AB පාදය මත P ලක්ෂ්‍යය ද, AC පාදය මත Q ලක්ෂ්‍යය ද පිහිටා ඇත. $Q\hat{P}B + P\hat{B}C = 180^\circ$ ක් බව සාධනය කරන්න.

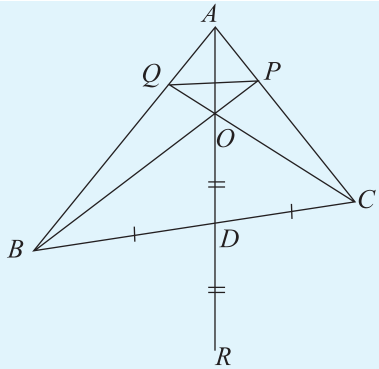
3. දී ඇති රූපයේ $AC//PR$ හා $AB//PQ$ වේ. $BC//QR$ බව සාධනය කරන්න.



4. රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ චතුරස්‍රයේ AC හා BD විකර්ණ K හි දී කැපේ. $AK = 4.8$ cm, $KC = 3.2$ cm, $BK = 3$ cm, $KD = 2$ cm නම්, DC, AB ට සමාන්තර බව පෙන්වන්න. (ඉඟිය: KDC ත්‍රිකෝණයේ, දික්කළ DK හා දික්කළ CK මත A හා B ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇතැයි සලකන්න.)



5.



රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයේ BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D වේ. O යනු AD මත පිහිටි ඕනෑ ම ලක්ෂ්‍යයකි. දික්කළ BO රේඛාව P හි දී AC ද, දික්කළ CO රේඛාව Q හි දී AB ද ඡේදනය කරයි. $OD = DR$ වන සේ, AD රේඛාව R තෙක් දික් කර ඇත.

(i) $BRCO$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව

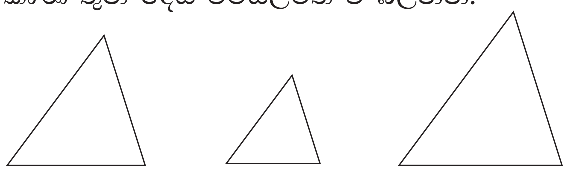
(ii) $AQ : QB = AO : OR$ බව

(iii) $QP//BC$ බව

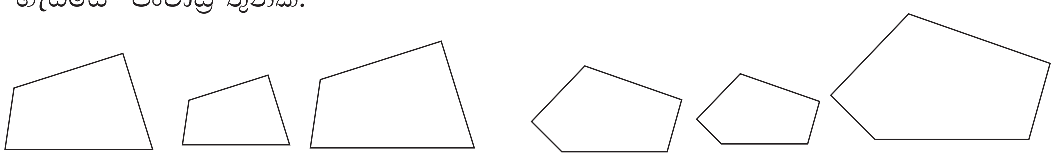
සාධනය කරන්න.

14.4 සමරූපී හා සමකෝණී රූප

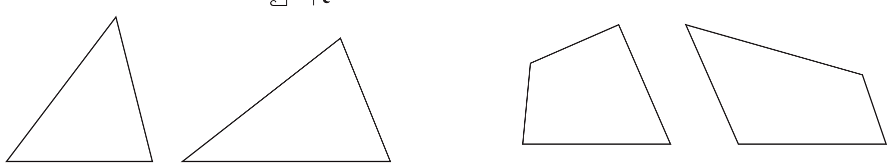
පහත දැක්වෙන ත්‍රිකෝණ තුන දෙස විමසිලිමත් ව බලන්න.



මෙම ත්‍රිකෝණ තුන එක ම "හැඩයේ" ත්‍රිකෝණ ලෙස අපි සාමාන්‍ය ව්‍යවහාරයේ දී හඳුන්වන්නෙමු. පහත රූපවල දැක්වෙන්නේ එක ම "හැඩයේ" චතුරස්‍ර තුනක් හා එකම "හැඩයේ" පංචාස්‍ර තුනකි.



එහෙත්, පහත දැක්වෙන ත්‍රිකෝණ යුගලය මෙන් ම චතුරස්‍ර යුගලය ද එකම හැඩයේ නොවන බව ඔබට පෙනෙනු ඇත.

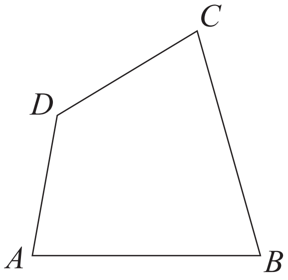


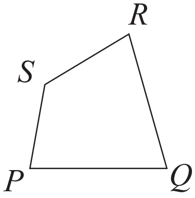
මෙහි දී "හැඩය" යන්නෙන් අදහස් වන දෑ කුමක් දැයි ඔබ සිතුවා ද? ගණිතයේ දී සියල්ල හැකි තාක් නිවැරදි ව අර්ථ දැක්වීම කළ යුතු ය. එමනිසා, "හැඩය" යන්නට නිවැරදි අර්ථයක් දී ම අවශ්‍ය ය. සාමාන්‍ය ව්‍යවහාරයේ යෙදෙන "එක ම හැඩයේ" යන්නට ගණිතයේ යෙදෙන පදය "සමරූපී" යන්න යි. මෙහි දී බහු-අස්‍රවල සමරූපී බව පිළිබඳ පමණක් සලකා බලමු.

බහු-අස්‍ර දෙකක් සමරූපී වේ යැයි කියනු ලබන්නේ එම බහු-අස්‍ර දෙකෙහි

1. එක් බහුඅස්‍රයක කෝණ අනෙක් බහුඅස්‍රයේ කෝණවලට සමාන වේ නම් හා
2. බහුඅස්‍ර දෙකෙහි අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ නම් ය.

නිදසුනක් ලෙස පහත දැක්වෙන $ABCD$ හා $PQRS$ චතුරස්‍ර දෙක සලකන්න.





එම චතුරස්‍ර දෙකෙහි,

$$\hat{A} = \hat{P},\ \hat{B} = \hat{Q},\ \hat{C} = \hat{R},\ \hat{D} = \hat{S} \text{ නම් හා}$$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} \text{ නම්}$$

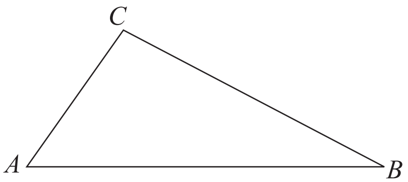
එවිට $ABCD$ හා $PQRS$ චතුරස්‍ර දෙක සමරූපී වේ.

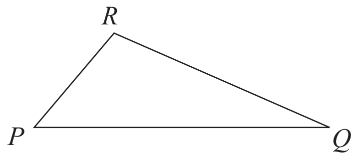
මෙම පාඩමේ දී අප වැඩිදුරට හැදෑරීමට බලාපොරොත්තු වන්නේ සමරූපී ත්‍රිකෝණ පිළිබඳ ව ය.

පහත දැක්වෙන ABC හා PQR ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි

$\hat{A} = \hat{P},\ \hat{B} = \hat{Q},\ \hat{C} = \hat{R}$ ද

$\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP}$ ද වේ නම් එවිට, අර්ථ දැක්වීම අනුව එම ත්‍රිකෝණ දෙක සමරූපී වේ.

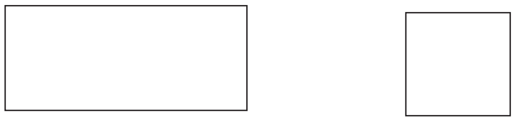




එසේ නමුත්, ත්‍රිකෝණවල සමරූපීතාව සම්බන්ධ ඉතා වැදගත් ප්‍රතිඵලයක් ඇත. එය නම්, ත්‍රිකෝණ දෙකක කෝණ සමාන නම් එම ත්‍රිකෝණ දෙක සමරූපී වීම යි. එය වෙනත් අයුරකින් පැවසුව හොත්, ත්‍රිකෝණ දෙකක කෝණ සමාන නම්, එවිට එම ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි අනුරූප පාද සමානුපාතික ද වේ. ඒ අනුව, ත්‍රිකෝණ දෙකක් සමරූපී වීම සඳහා එම ත්‍රිකෝණ දෙකේ කෝණ සමාන දැයි පරීක්ෂා කිරීම ප්‍රමාණවත් ය. නිදසුනක් ලෙස, ඉහත දැක්වෙන ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි $\hat{A} = \hat{P}$, $\hat{B} = \hat{Q}$ හා $\hat{C} = \hat{R}$ නම් එවිට $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP}$ වේ.

මෙම ප්‍රතිඵලය ත්‍රිකෝණ නොවන බහු-අස්‍ර සඳහා සත්‍ය නොවේ. නිදසුනක් ලෙස, පහත දැක්වෙන චතුරස්‍ර දෙකෙහි කෝණ සමාන වේ. ඒවා සියල්ල ම 90° බැගින් වේ. එයින් එකක්

ඍජුකෝණාස්‍රයක් වන අතර, අනෙක සමචතුරස්‍රයකි. එබැවින්, ඒවායේ පාද සමානුපාතික විය නොහැකි ය. එමනිසා, එම චතුරස්‍ර දෙක සමරූපී නො වේ.



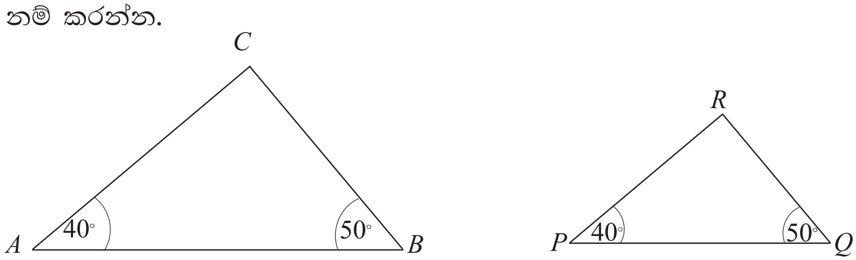
බහු-අස්‍ර දෙකක කෝණ සමාන නම්, එවිට එම බහු-අස්‍ර දෙක සමකෝණී යැයි කියනු ලැබේ. ඉහත සාකච්ඡාවට අනුව, සමකෝණී ත්‍රිකෝණ දෙකක් සමරූපී ද වේ. මෙම ප්‍රතිඵලය, සාධනයකින් තොර ව, ප්‍රමේයයක් ලෙස අපි භාවිතා කරමු.

සමකෝණී ත්‍රිකෝණ ප්‍රමේයය:
ත්‍රිකෝණ දෙකක් සමකෝණී වේ නම් එම ත්‍රිකෝණ දෙකේ අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ.

මෙම ප්‍රතිඵලය වඩාත් හොඳින් වටහා ගැනීම සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකමේ යෙදෙන්න.

ක්‍රියාකාරකම

- කෝණමානය භාවිතයෙන්, කෝණ 40°, 50° හා 90° වන, ප්‍රමාණයෙන් එකිනෙකට වෙනස් ත්‍රිකෝණ දෙකක් අඳින්න. ඒවා පහත දැක්වෙන පරිදි, ABC හා PQR ලෙස නම් කරන්න.



- ත්‍රිකෝණ දෙකේ අනුරූප පාද අතර අනුපාත (භාග ආකාරයෙන්) සොයන්න; එනම්, $\frac{AB}{PQ}$, $\frac{BC}{QR}$ හා $\frac{CA}{RP}$ යන අගයන් වෙන වෙන ම සොයන්න.
- ඉහත අගයන් තුන සමාන දැයි පරීක්ෂා කරන්න (මිනුම්වල දී ඇති වන දෝෂ නිසා ඔබට ලැබෙන අගයන්වල සුළු දෝෂ තිබිය හැකි ය.)

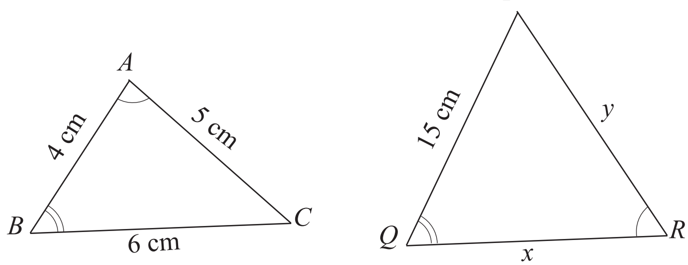
ඉහත ක්‍රියාකාරකම අනුව, සමකෝණී ත්‍රිකෝණ දෙකක අනුරූප පාද සමානුපාතික වන බව, එනම් එම ත්‍රිකෝණ දෙක සමරූපී වන බව ඔබට වැටහෙන්නට ඇත.

සටහන:

1. ත්‍රිකෝණ දෙකක් සඳහා සමරූපී හා සමකෝණී යන පදවලට එක ම අදහස ඇත.
2. අංගසම වන ත්‍රිකෝණ දෙකක් සමරූපී වන බව පැහැදිලි ය.එහෙත්, සමරූපී ත්‍රිකෝණ දෙකක් අංගසම නොවිය හැකි ය.
3. ත්‍රිකෝණයක කෝණ දෙකක් තවත් ත්‍රිකෝණයක කෝණ දෙකකට සමාන නම් ඉතිරි කෝණ දෙක ද සමාන වේ. එයට හේතුව ඕනෑ ම ත්‍රිකෝණයක කෝණ සියල්ලෙහි එකතුව 180° වීම යි. එමනිසා, ත්‍රිකෝණ දෙකක් සමකෝණී වීම සඳහා, එක ත්‍රිකෝණයක කෝණ දෙකක්, අනෙකෙහි කෝණ දෙකකට සමාන වීම ප්‍රමාණවත් ය.

නිදසුන 1

රූපයේ දැක්වෙන ABC හා PQR ත්‍රිකෝණ දෙකේ, $\hat{A} = \hat{R}$ හා $\hat{B} = \hat{Q}$ වේ. PQR ත්‍රිකෝණයේ x හා y මගින් දැක්වෙන අගයයන් සොයන්න.



ABC හා PQR ත්‍රිකෝණ දෙකේ,

$\hat{A} = \hat{R}$ හා $\hat{B} = \hat{Q}$

$\therefore \quad \hat{C} = \hat{P}$ (ත්‍රිකෝණ අභ්‍යන්තර කෝණ ඓක්‍යය 180° නිසා)

$\therefore \quad ABC$ හා PQR සමකෝණික ත්‍රිකෝණ දෙකකි.

$\therefore$ අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ.

එවිට; $\dfrac{BC}{PQ} = \dfrac{AB}{QR}$

$$\therefore \quad \frac{6}{15} = \frac{4}{x}$$

$6x = 15 \times 4$ (හරස් ගුණිතය ගත් විට)

$$\therefore \quad x = \frac{15 \times 4}{6}$$

$$= 10$$

$\therefore x = 10 \text{ cm}$ වේ.

$$\frac{BC}{PQ} = \frac{AC}{PR}$$

$$\therefore \quad \frac{6}{15} = \frac{5}{y}$$

$$6y = 15 \times 5$$

$$y = \frac{15 \times 5}{6}$$

$$= 12.5$$

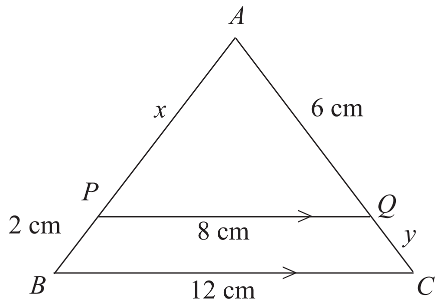
$\therefore \quad y = 12.5 \text{ cm}$ වේ.

නිදසුන 2

ABC ත්‍රිකෝණයේ, BC පාදයට සමාන්තර ව PQ ඇඳ තිබේ.

(i) ABC හා APQ සමකෝණික ත්‍රිකෝණ බව පෙන්වන්න.

(ii) x හා y මගින් දැක්වෙන අගය සෙන්ටිමීටරවලින් සොයන්න.



(i) ABC හා APQ ත්‍රිකෝණ දෙකේ,

$A\hat{B}C = A\hat{P}Q$ (අනුරූප කෝණ, $BC//PQ$)

$A\hat{C}B = A\hat{Q}P$ (අනුරූප කෝණ, $BC//PQ$)

$\hat{A}$ ත්‍රිකෝණ දෙකටම පොදුයි.

$\therefore$ ABC හා APQ සමකෝණික ත්‍රිකෝණ දෙකකි.

(ii) ABC හා APQ සමකෝණික ත්‍රිකෝණ දෙකක් නිසා ප්‍රමේයයට අනුව අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ.

$$\therefore \frac{BC}{PQ} = \frac{AB}{AP}$$

$$\therefore \frac{12}{8} = \frac{x+2}{x}$$

$$12x = 8\,(x+2)$$

$$12\,x = 8x + 16$$

$$12\,x - 8x = 16$$

$$4x = 16$$

$$x = 4$$

$\therefore$ $x = 4$ cm වේ.

$$\frac{BC}{PQ} = \frac{AC}{AQ}$$

$$\frac{12}{8} = \frac{6+y}{6}$$

$$8\,(6+y) = 6 \times 12$$

$$48 + 8y = 72$$

$$8y = 72 - 48$$

$$8y = 24$$

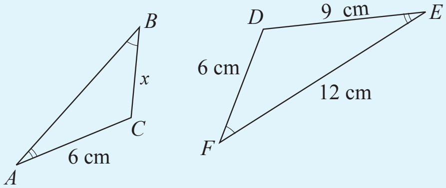
$$y = 3$$

$\therefore$ $y = 3$ cm වේ.

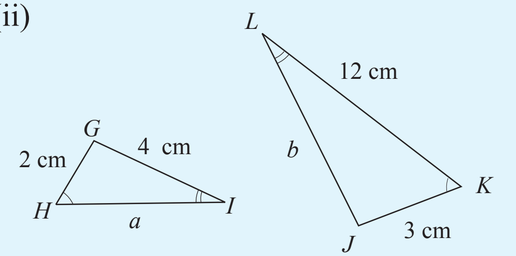
14.4 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් ත්‍රිකෝණ යුගලයේ අඥාත මගින් දක්වා ඇති පාදවල දිග සොයන්න.

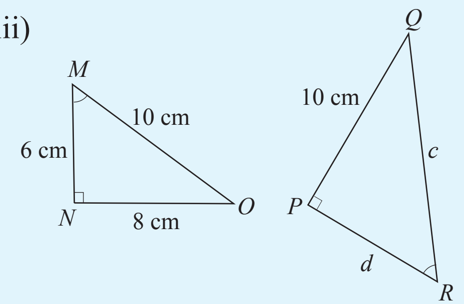
(i)



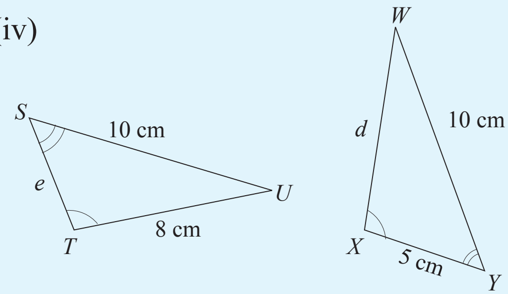
(ii)



(iii)

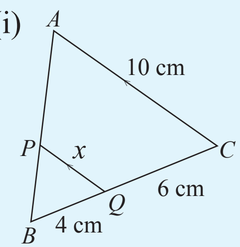


(iv)

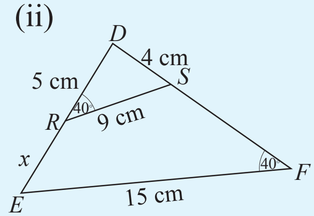


2. පහත දැක්වෙන එක් එක් රූපයේ ඇතුළත් ත්‍රිකෝණ යුගලය සමකෝණික බව පෙන්වා, එහි අඥාත මගින් දක්වා ඇති පාදවල දිග සොයන්න.

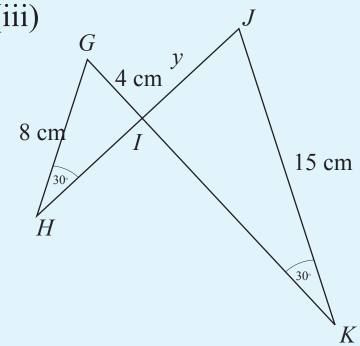
(i)



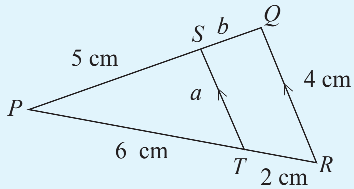
(ii)



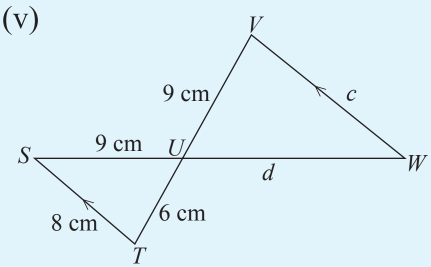
(iii)



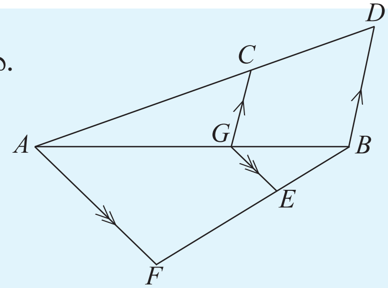
(iv)



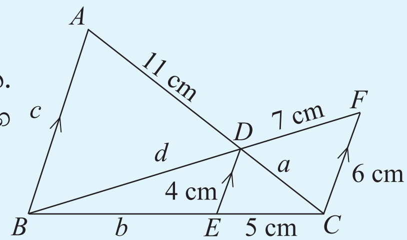
(v)



3. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව
(i) සමකෝණික ත්‍රිකෝණ යුගල දෙකක් නම් කරන්න.
(ii) $BD = 9$ cm, $GC = 6$ cm, $AG = 12$ cm, $GE = 2$ cm නම්, GB දිග හා AF දිග සොයන්න.



4. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව
(i) සමකෝණික ත්‍රිකෝණ යුගල තුනක් නම් කරන්න.
(ii) a, b, c හා d මගින් දැක්වෙන රේඛා ඛණ්ඩවල දිග සොයන්න.



අප මීළඟට විමසා බලන්නේ ඉහත ප්‍රමේයයේ විලෝමය පිළිබඳ ව යි. එනම්, ත්‍රිකෝණ දෙකක පාද සමානුපාතික නම් එම ත්‍රිකෝණ දෙක සමකෝණී වේ ද යන්න පිළිබඳ ව යි. මෙම විලෝමය ද සත්‍ය ප්‍රතිඵලයක් වේ.

තව ද,
ත්‍රිකෝණයක පාද තුන, තවත් ත්‍රිකෝණයක පාද තුනට සමානුපාතික නම්, එවිට එම ත්‍රිකෝණ දෙක සමරූපී වේ.

මෙම ප්‍රතිඵලය වඩාත් හොඳින් වටහා ගැනීම සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකමේ යෙදෙන්න.

ක්‍රියාකාරකම

- $AB = 2.5$ cm, $BC = 3$ cm, $AC = 3.5$ cm වූ ABC ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
- $PQ = 5$ cm, $QR = 6$ cm හා $PR = 7$ cm වූ PQR ත්‍රිකෝණය ද නිර්මාණය කරන්න.
- $\frac{AB}{PQ}, \frac{BC}{QR}, \frac{AC}{PR}$ හි අගයයන් අතර සම්බන්ධතාව පරීක්ෂා කරන්න.
- එක් එක් ත්‍රිකෝණයේ කෝණ තුන වෙන වෙන ම මැන ගන්න.
- ඒ අනුව, ABC හා PQR ත්‍රිකෝණ කුමන වර්ගයේ ත්‍රිකෝණ ද?

එක් එක් ත්‍රිකෝණයේ අනුරූප පාද අතර අනුපාත සමාන බවත් ABC ත්‍රිකෝණයේ කෝණ තුන PQR ත්‍රිකෝණයේ කෝණ තුනට සමාන වන බවත්, ක්‍රියාකාරකමෙන් දැක ගත හැකි ය.

මෙම ප්‍රතිඵලය මීට පෙර උගත් සමකෝණික ත්‍රිකෝණ ප්‍රමේයයේ විලෝමය ලෙස මෙසේ ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

ප්‍රමේයය: එක් ත්‍රිකෝණයක පාද තුන, තවත් ත්‍රිකෝණයක පාද තුනට සමානුපාතික වේ නම් එම ත්‍රිකෝණ දෙක සමකෝණික වේ.

නිදසුන 1

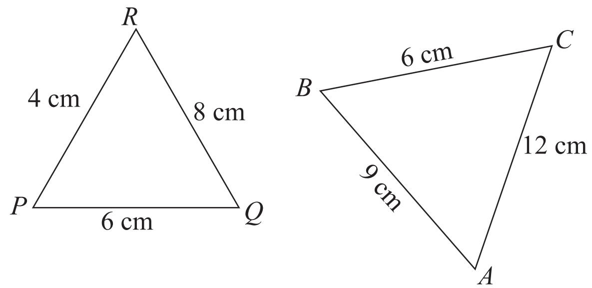
රූපයේ දී ඇති පාදවල දිග අනුව, ABC හා PQR ත්‍රිකෝණ සමකෝණික බව හේතු දක්වමින් පෙන්වන්න. එකිනෙකට සමාන වන කෝණ යුගල නම් කරන්න.

ත්‍රිකෝණ දෙකේ දී ඇති පාද දිග අනුව,
අනුපාත ලියූ විට;

(i) $\dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

(ii) $\dfrac{RQ}{CA} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$

(iii) $\dfrac{PR}{BC} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$



මෙම අනුපාත සමාන නිසා, ප්‍රමේයයේ විලෝමය අනුව, PQR හා ABC ත්‍රිකෝණ සමකෝණික වේ.

PQR ත්‍රිකෝණයේ PQට සම්මුඛ කෝණය $\hat{R}$

PRට සම්මුඛ කෝණය $\hat{Q}$

QRට සම්මුඛ කෝණය $\hat{P}$

ABC ත්‍රිකෝණයේ ABට සම්මුඛ කෝණය $\hat{C}$

BCට සම්මුඛ කෝණය $\hat{A}$

ACට සම්මුඛ කෝණය $\hat{B}$

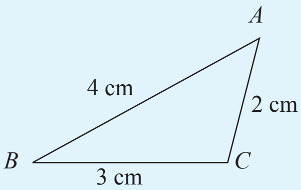
$$\therefore \; \hat{P} = \hat{B}, \hat{Q} = \hat{A}, \hat{R} = \hat{C}$$

"පාද අතර අනුපාත සමාන ත්‍රිකෝණ සමකෝණික වේ." යන ප්‍රමේයය යොදා ගනිමින් පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

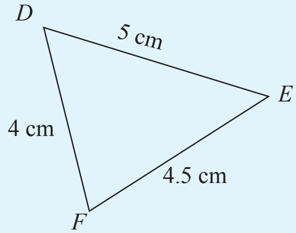
14.5 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන මිනුම් සහිත ත්‍රිකෝණවල දළ සටහන් අතරින්, සමකෝණික ත්‍රිකෝණ යුගල තුනක් තෝරන්න.

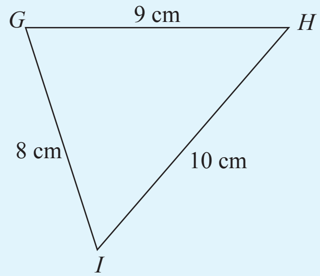
(i)



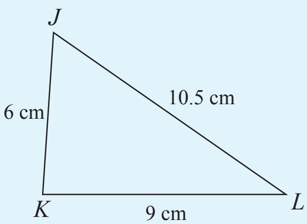
(ii)



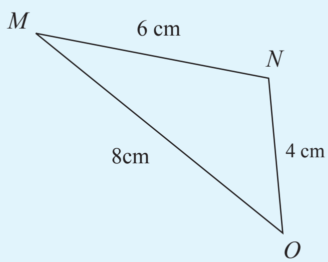
(iii)



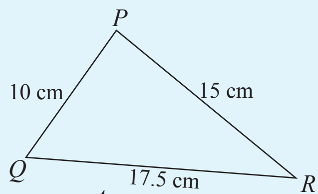
(iv)



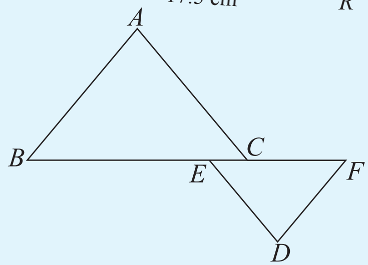
(v)



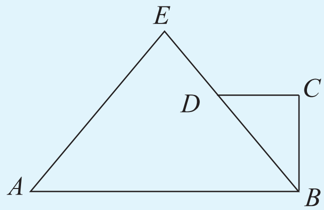
(vi)



2. දී ඇති රූපයේ $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{AC}{ED} = \dfrac{BC}{DF}$ වේ. $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ හා $A\hat{C}B$ කෝණ එක එකක් සඳහා සමාන වෙනත් කෝණයක් ලියා දක්වන්න.



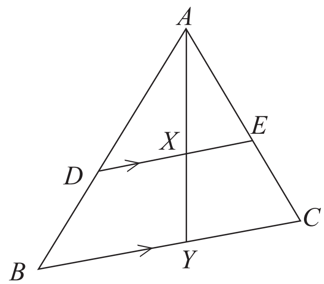
3. දී ඇති රූපයේ $AB = 20$ cm ද, $BC = 6$ cm ද $CD = 4$ cm ද $DB = 8$ cm ද $DE = 2$ cm ද $AE = 15$ cm ද වේ. $AB//DC$ බව පෙන්වන්න. තවද, දික්කළ CDට F හි දී AE හමු වේ නම් AF දිග සොයන්න.



14.5 සමකෝණික ත්‍රිකෝණ පිළිබඳ ප්‍රමේය මගින් අනුමේය සාධනය

මෙතෙක් උගත් ප්‍රමේයයන් අවශ්‍ය පරිදි යොදා ගනිමින් අනුමේයයන් සාධනය කරන අයුරු දැන් ඉගෙන ගනිමු. ඒ සඳහා පහත දැක්වෙන නිදසුන් අධ්‍යයනය කරන්න.

නිදසුන 1



ABC ත්‍රිකෝණයේ AB හා AC පාද මත D සහ E ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත්තේ $DE//BC$ වන සේ ය. DE, X හි දී ද BC, Y හි දී ද කැපෙන සේ, AY ඇඳ තිබේ.

(i) $\dfrac{XE}{YC} = \dfrac{AX}{AY}$ බව

(ii) $\dfrac{XE}{YC} = \dfrac{DX}{BY}$ බව

සාධනය කරන්න.

සාධනය : (i) රූපයේ AXE හා AYC ත්‍රිකෝණ දෙකේ;

$A\hat{X}E = A\hat{Y}C$ (අනුරූප කෝණ, $XE//YC$)

$A\hat{E}X = A\hat{C}Y$ (අනුරූප කෝණ, $XE//YC$)

$\hat{A}$ ත්‍රිකෝණ දෙකට ම පොදු යි.

$\therefore$ AXE හා AYC සමකෝණික ත්‍රිකෝණ දෙකකි.

$\therefore$ අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ.

එවිට; $\dfrac{AX}{AY} = \dfrac{XE}{YC}$ (ප්‍රමේයයට අනුව)

(ii) රූපයේ, ADX හා ABY ත්‍රිකෝණ දෙකේ,

$A\hat{D}X = A\hat{B}Y$ (අනුරූප කෝණ, $DX//BY$)

$A\hat{X}D = A\hat{Y}B$ (අනුරූප කෝණ, $DX//BY$)

$\hat{A}$ ත්‍රිකෝණ දෙකටම පොදුයි.

$\therefore$ ADX හා ABY සමකෝණික ත්‍රිකෝණ දෙකකි.

$\therefore$ අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ.

$\therefore \dfrac{AX}{AY} = \dfrac{DX}{BY}$

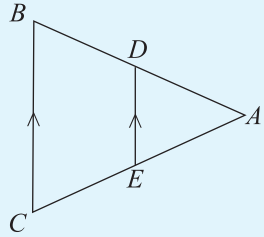
නමුත් $\frac{AX}{AY} = \frac{XE}{YC}$ (සාධිතයි)

$\therefore \frac{XE}{YC} = \frac{DX}{BY}$

දැන් පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

14.6 අභ්‍යාසය

1. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව

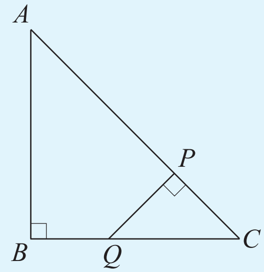


(i) ADE හා ABC ත්‍රිකෝණ සමකෝණික බව පෙන්වන්න.

(ii) $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ බව සාධනය කරන්න.

(iii) $\frac{AE}{ED} = \frac{AC}{BC}$ බව සාධනය කරන්න.

2. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව

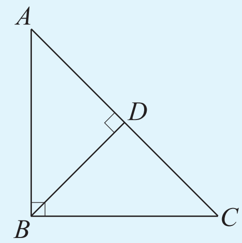


(i) ABC හා PQC ත්‍රිකෝණ සමකෝණික බවත්

(ii) $\frac{QC}{AC} = \frac{PQ}{AB} = \frac{PC}{BC}$ බවත්

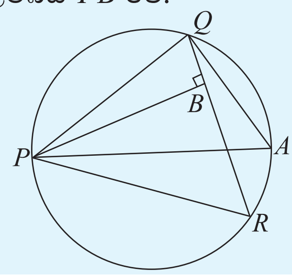
සාධනය කරන්න.

3. ABC ත්‍රිකෝණයේ, $\hat{B}$ ඍජුකෝණයකි. B සිට ACට ඇඳි ලම්බය BD වේ.



(i) $AB^2 = AD.\, AC$ බව සාධනය කරන්න.

4. PA යනු දී ඇති වෘත්තයේ විෂ්කම්භයකි. P සිට QRට ඇඳි ලම්බය PB වේ.



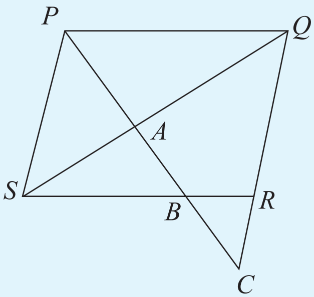
(i) PQA හා PBR ත්‍රිකෝණ සමකෝණික බව සාධනය කරන්න.

(ii) $\frac{PQ}{PB} = \frac{PA}{PR}$ බව

සාධනය කරන්න.

5. $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයේ $Q\hat{P}S$ හි සමච්ඡේදකයට QS විකර්ණය A හි දී ද SR පාදය B හි දී ද, දික් කළ QR පාදය C හි දී ද හමු වේ.

$\dfrac{PQ}{PS} = \dfrac{PC}{PB}$ බව සාධනය කරන්න.



6. ABC ත්‍රිකෝණයේ AB පාදය මත P ද, AC පාදය මත Q ද පිහිටා ඇත්තේ $A\hat{P}Q = A\hat{C}B$ වන සේ ය. $AP.AB = AQ.AC$ බව සාධනය කරන්න.

7. ABC ත්‍රිකෝණයේ ශීර්ෂ වෘත්තයක් මත පිහිටා ඇත. $B\hat{A}C$ හි සමච්ඡේදකයෙන්, BC පාදය Q හි දී ද P හි දී වෘත්තය ද කැපේ. $AC : AP = AQ : AB$ බව සාධනය කරන්න.

8. ABC ත්‍රිකෝණයේ, $B\hat{A}C$ හි සමච්ඡේදකයට BC පාදය D හි දී හමු වේ. $CX = CD$ වන සේ, දික්කළ AD මත X ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත.

(i) ACX හා ABD ත්‍රිකෝණ සමකෝණික බව

(ii) $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$ බව

සාධනය කරන්න.

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයේ, DC පාදය මත E ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ $A\hat{E}B = 90^\circ$ වන සේය. ADE, AEB හා EBC ත්‍රිකෝණ සමරූපී බව සාධනය කරන්න.

2. ABC ත්‍රිකෝණයෙහි $\hat{B}$ සෘජුකෝණයකි. $AB = 5$ cm හා $BC = 2$ cm වේ. AC හි ලම්බ සමච්ඡේදකය Q හි දී AB පාදය කපයි. $AQ = 2.9$ cm බව පෙන්වන්න.

3. ABC ත්‍රිකෝණයේ, AB පාදය P හි දී ද, AC පාදය Q හි දී ද හමු වන සේ, BC ට සමාන්තරව PQ ඇඳ තිබේ. CP හා BQ රේඛා S හි දී එකිනෙක කැපී යයි. BC පාදය R හි දී හමු වන සේ, AB ට සමාන්තරව SR ඇඳ තිබේ.

$\dfrac{BR}{RC} = \dfrac{AQ}{AC}$ බව සාධනය කරන්න.

15 දත්ත නිරූපණය හා අර්ථකථනය

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට, සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක
- පන්ති සීමා සහ පන්ති මායිම් සෙවීමට
- ජාල රේඛය ඇඳීමට
- සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය ඇඳීමට
- සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇඳීම හා වක්‍රය ඇසුරෙන් අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය සෙවීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

පන්ති ප්‍රාන්තරයක සීමා හා මායිම්

සිසුන් 30 දෙනෙකුගේ උස (ආසන්න සෙන්ටිමීටරයට) මැනීමෙන් ලබා ගන්නා ලද දත්ත සමූහයක් පහත දැක්වේ.

137, 135, 141, 147, 151, 135, 137, 143, 144, 145
140, 134, 141, 140, 153, 144, 133, 138, 155, 130
136, 137, 142, 143, 145, 143, 154, 146, 148, 158

දත්තවල වැඩි ම අගයෙන් අඩු ම අගය අඩු කළ විට ලැබෙන අගය, **පරාසය** ලෙස හැඳින්වෙන බව අපි දනිමු. එනම්,

$$\text{දත්තවල පරාසය} = 158 - 130$$
$$= 28$$

අධ්‍යයනය කිරීමේ පහසුව සඳහා දත්ත සමූහයක් බොහෝ විට සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියකින් දක්වනු ලැබේ. දත්තවල පරාසය වැඩි වන විට, දත්ත පන්ති ප්‍රාන්තරවලට බෙදා දක්වන බව ද අපි දනිමු. එවැනි පන්ති ප්‍රාන්තරවලට බෙදා දැක්වෙන සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්ති, **සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්ති** ලෙස හැඳින්වේ. ප්‍රාන්තර ගණන සාමාන්‍යයෙන් 5ත් 10ත් අතර ගණනක් වේ. එවැනි ව්‍යාප්තියක පන්ති ප්‍රාන්තරයක තරම ලෙස ගන්නේ, සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ පරාසය, පන්ති ප්‍රාන්තර සංඛ්‍යාවෙන් බෙදීමෙන් ලැබෙන අගයට වැඩි නිඛිලවලින් අඩු ම අගයයි.

නිදසුනක් වශයෙන් ඉහත සඳහන් දත්ත, පන්ති ප්‍රාන්තර 6ක් යටතේ ගොනු කරමු. පන්ති ප්‍රාන්තරයක තරම සෙවීම සඳහා මුලින් ම, පරාසය වන 28, පන්ති ප්‍රාන්තර ගණන වන 6න් බෙදමු.

එවිට, $= \dfrac{28}{6} \approx 4.66$ ලැබේ.

එමනිසා, පන්ති ප්‍රාන්තරයක තරම ලෙස තෝරා ගත යුත්තේ 4.66ට වැඩි නිඛිලවලින් අඩු ම නිඛිල අගය වන 5 ය.
ඉන් පසු, මුල් පන්ති ප්‍රාන්තරය තෝරා ගත යුතු ය. දත්තවල අවම අගය 130 නිසා, මුල් පන්ති ප්‍රාන්තරය 130න් ආරම්භ කළ හැකි ය.

දී ඇති දත්ත සමූහය ඇසුරෙන් සකස් කළ එකිනෙකට වෙනස් සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්ති දෙකක් පහත දැක්වේ.

පන්ති ප්‍රාන්තර	සංඛ්‍යාතය
130 -135	3
135 - 140	7
140 - 145	10
145 - 150	5
150 - 155	3
155 - 160	2

පළමු සමූහිත ව්‍යාප්තිය

පන්ති ප්‍රාන්තර	සංඛ්‍යාතය
130 -134	3
135 - 139	7
140 - 144	10
145 - 149	5
150 - 154	3
155 - 159	2

දෙවන සමූහිත ව්‍යාප්තිය

මුලින් ම, පළමු සමූහිත ව්‍යාප්තිය සලකන්න. නිදසුනක් ලෙස එහි ඇති 130 - 135 පන්ති ප්‍රාන්තරයෙන් දැක්වෙන්නේ 130ට වැඩි හෝ සමාන හා 135ට අඩු උස ප්‍රමාණයන් ය. දෙවන පන්ති ප්‍රාන්තරය වන 135 - 140න් දැක්වෙන්නේ 135ට වැඩි හෝ සමාන හා 140ට අඩු උස ප්‍රමාණයන් ය. මේ ආදී වශයෙන් අනෙකුත් ප්‍රාන්තර ද විස්තර කළ හැකි ය.

දැන්, දෙවන සමූහිත ව්‍යාප්තිය සලකන්න. එහි, නිදසුනක් ලෙස, 130 - 134 පන්ති ප්‍රාන්තරයෙන් දැක්වෙන්නේ 130ට වැඩි හෝ සමාන හා 134ට අඩු හෝ සමාන උස ප්‍රමාණයන් ය.

මෙම ව්‍යාප්ති දෙකෙහි පන්ති ප්‍රාන්තර පිළිබඳ ව නිරීක්ෂණය කළ හැකි තවත් වෙනසක් දැන් සලකා බලමු. මුල් ව්‍යාප්තියෙහි පන්ති ප්‍රාන්තර අතර හිඩැස් නැත. නිදසුනක් ලෙස, 130 - 135 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ ඉහළ සීමාව වන 135න් ම ඊළඟ පන්ති ප්‍රාන්තරය වන 135 - 140 ආරම්භ වේ. එනම්, මෙහි පන්ති ප්‍රාන්තරවලට පොදු සීමාවක් ඇත. එහෙත්, දෙවන ව්‍යාප්තියේ එය එසේ නො වේ. නිදසුනක් ලෙස, 130 - 134 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ ඉහළ සීමාව 134 වන අතර, ඊළඟ ප්‍රාන්තරය ආරම්භ වන්නේ 135නි. එම සීමා අතර 1 ක වෙනසක් ඇත. මෙම පාඩමේ මීළඟ කොටසේ දී අප ඉගෙනීමට බලාපොරොත්තු වන ජාල රේඛය ඇඳීම සඳහා, මෙසේ හිඩැසක් නොතිබිය යුතු ය. එමනිසා, මෙම දෙවන ව්‍යාප්තිය සුදුසු පරිදි වෙනස් කර ගත යුතු ය. මෙහි ඇති පන්ති ප්‍රාන්තරවලට පොදු මායිමක් හඳුන්වා දීමෙන් මෙම වෙනස්කම කරනු ලැබේ. එම මායිම පහසුවෙන් හඳුනා ගත හැකි ය.

නිදසුනක් ලෙස, දෙවන ව්‍යාප්තියේ 130 - 134 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ ඉහළ සීමාව වන 134ත් 135 - 139 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ පහළ සීමාව වන 135ත් අතර හරි මැද පිහිටි 134.5 යන්න මායිම ලෙස ගනු ලැබේ. එසේ ගෙන සෑදූ නව ව්‍යාප්තිය පහත දැක්වේ.

මායිම් සහිත පන්ති ප්‍රාන්තර	සංඛ්‍යාතය
129.5 - 134.5	3
134.5 - 139.5	7
139.5 - 144.5	10
144.5 - 149.5	5
149.5 - 154.5	3
154.5 - 159.5	2

මෙහි දී, මුල් ව්‍යාප්තියේ සෑම පන්ති ප්‍රාන්තරයකම පහළ සීමාවෙන් 0.5ක් අඩු වී ඇති බවත්, ඉහළ සීමාවට 0.5ක එකතු වී ඇති බවත් නිරීක්ෂණය කරන්න. මෙම නීතිය මුල් හා අවසාන පන්ති ප්‍රාන්තරවලට ද වලංගු වේ. ඒ අනුව 129.5 හා 159.5 ලැබී ඇති බව ද නිරීක්ෂණය කරන්න. එසේ ම, මෙම නව ව්‍යාප්තියේ පන්ති ප්‍රාන්තරයක තරම අප බලාපොරොත්තු වූ පරිදි 5 වන බව ද නිරීක්ෂණය කරන්න.

ඉහත පළමු ආකාරයේ සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්ති සරල ය. එහෙත්, ප්‍රායෝගික ව, දෙවන ආකාරයේ ව්‍යාප්ති තැනීම පහසු ය. මෙම ආකාර දෙකේ ම ව්‍යාප්ති සංඛ්‍යානයේ දී බොහෝ විට හමු වේ.

15.1 සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක ජාල රේඛය

දැන්, සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් දී ඇති විට ජාල රේඛය අඳින අයුරු විමසා බලමු.

ජාල රේඛය යනු සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක ඇති දත්ත ප්‍රස්තාරික ව නිරූපණය කරන ක්‍රමයකි. එහි දී පන්ති ප්‍රාන්තරවල සංඛ්‍යාත, එකිනෙකට ස්පර්ශ ව පවතින සෘජුකෝණාස්‍රාකාර තීරුවල උසින් දක්වනු ලැබේ. පන්ති ප්‍රාන්තර සියල්ලට ම එක ම තරම ඇති අවස්ථාවේ දී (ඉහත කොටසේ නිදසුනේ ඇති පරිදි) ජාල රේඛය අඳින අයුරු මුලින් ම සලකා බලමු.

ජාල රේඛයක් ඇඳීමේ දී පහත දැක්වෙන පියවර අනුගමනය කරන්න.

- සුදුසු පරිමාණයකට තිරස් අක්ෂය මත පන්ති මායිම් ලකුණු කරන්න.
- සුදුසු පරිමාණයකට සිරස් අක්ෂය මත එක් එක් පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සංඛ්‍යාතයේ උස දැක්වෙන තීරු අඳින්න.

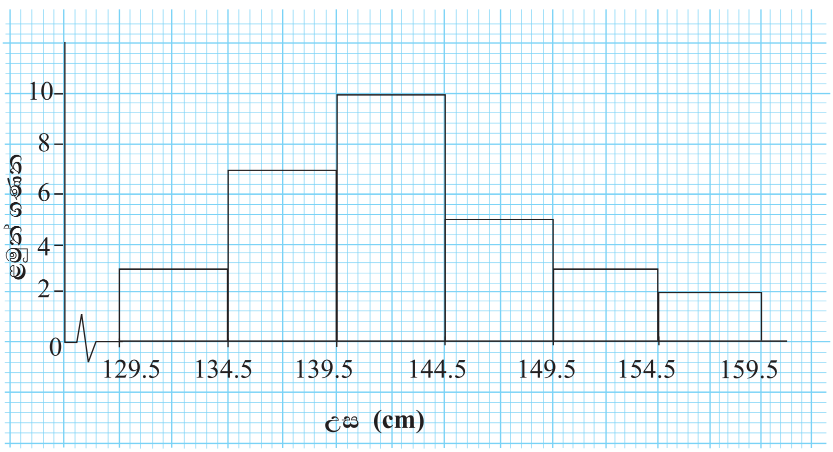
දැන් පහත දැක්වෙන නිදසුන් මගින් ජාල රේඛය අඳින අයුරු විමසා බලමු.

නිදසුන 1

ඉහත කොටසේ නිදසුනෙහි පිළියෙල කළ සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියෙහි ජාල රේඛය අඳින්න.
මේ සඳහා දෙවන ආකාරයේ සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය සලකමු.

මායිම් සහිත පන්ති ප්‍රාන්තර	සංඛ්‍යාතය
129.5 - 134.5	3
134.5 - 139.5	7
139.5 - 144.5	10
144.5 - 149.5	5
149.5 - 154.5	3
154.5 - 159.5	2

අදාළ ජාල රේඛය පහත දැක්වේ.
තිරස් අක්ෂය ඔස්සේ කුඩා කොටු දෙකකින් සෙන්ටිමීටර 1ක් ද සිරස් අක්ෂය ඔස්සේ කුඩා බෙදුම් 5කින් ළමයි දෙදෙනකු ද නිරූපණය කොට ඇත.



මෙහි දී තීරු එකිනෙක ස්පර්ශ ව පවතින බව නිරීක්ෂණය කරන්න.

සටහන: මෙහි දත්ත 129.5න් පටන් ගන්නා බැවින් 0 සිට 129.5 දක්වා පන්ති ප්‍රාන්තර ජාල රේඛයේ පෙන්වීම අනවශ්‍ය වේ. x අක්ෂයෙහි මුලින් ලකුණ යොදා ඇත්තේ එම කොටස ඇඳීමේදී නොසලකා ඇති බව දැක්වීමට ය.

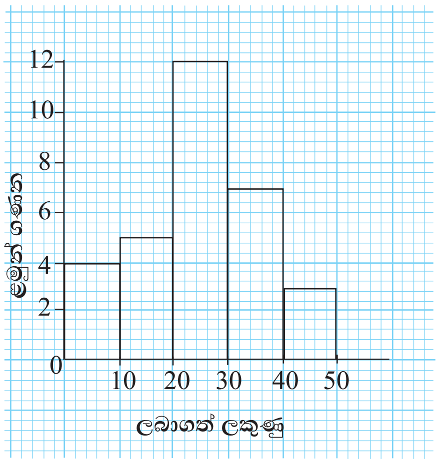
නිදසුන 2

පාසල් පාදක ඇගයීමක දී ළමයි ගණිත විෂයය සඳහා ලබාගත් ලකුණු දැක්වෙන සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වේ.

පන්ති ප්‍රාන්තර (ලබාගත් ලකුණු)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
සංඛ්‍යාතය (ළමයි සංඛ්‍යාව)	4	5	12	7	3

මෙහි, නිදසුනක් ලෙස, 0 - 10 ප්‍රාන්තරයෙන් දැක්වෙන්නේ 0ට වැඩි හෝ සමාන හා 10ට අඩු ලකුණු යි. මේ ආදි ලෙස අනෙක් පන්ති ප්‍රාන්තර ද අර්ථ දැක්වේ. සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියට අදාළ ජාල රේඛය අඳින්න.

මෙම සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ පළමු පන්ති ප්‍රාන්තරය 10න් අවසන් වන අතර, ඊළඟ පන්ති ප්‍රාන්තරය 10න් ඇරඹේ. මෙහි ජාල රේඛය ඉතා පහසුවෙන් ඇඳිය හැකි ය.



පන්ති ප්‍රාන්තරවල තරම අසමාන වන පරිදි වූ සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක ජාල රේඛය ඇඳීම පිළිබඳ ව දැන් විමසා බලමු.

නිදසුන 3

වාර පරීක්ෂණයක දී ගණිත විෂය සඳහා ළමයි 40 දෙනකු ලබාගත් ලකුණු ඇසුරෙන් සකස් කළ සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වේ.

පන්ති ප්‍රාන්තර (ලබාගත් ලකුණු)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 70	70 - 100
සංඛ්‍යාතය (ළමයි සංඛ්‍යාව)	2	4	6	9	5	8	6

මෙහි පන්ති ප්‍රාන්තර පරීක්ෂා කිරීමේ දී සියලු පන්ති ප්‍රාන්තරවල තරම සමාන නොවන බව ඔබට දැකිය හැකි ය. මුල් ප්‍රාන්තර 5හි තරම 10 බැගින් වන අතර, ඊළඟ ප්‍රාන්තර දෙකෙහි තරම පිළිවෙළින් 20 හා 30 වේ. ජාල රේඛයක තිබිය යුතු වැදගත් ලක්ෂණයක් වන්නේ තීරුවල වර්ගඵල අදාළ සංඛ්‍යාතයන්ට සමානුපාතික වීම යි. ඒ අනුව පන්ති ප්‍රාන්තරවල තරම සමාන වන විට, සංඛ්‍යාතය, තීරුවේ උසට සමානුපාතික වේ. එබැවින් ඉහත 1 හා 2 නිදසුන්වල දී සංඛ්‍යාත, තීරුවේ උස මගින් එක්වර ම දැක්විය හැකි විය. එහෙත් මෙහි දී පන්ති ප්‍රාන්තරවල තරම සමාන නොවන නිසා සංඛ්‍යාතය උස මගින් එක්වර දැක්විය නො හැකි ය. තීරුවල උස සංඛ්‍යාතයට සමානුපාතික වන ලෙස සකස් කරගත යුතු ය. එය කරනු ලබන්නේ පහත දැක්වෙන පරිදි ය.

සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ 50 - 70 සහ 70 - 100 පන්ති ප්‍රාන්තර හැර අනෙක් පන්ති ප්‍රාන්තරවල තරම 10 වේ. 50 - 70 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ තරම 20 ද 70 - 100 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ තරම 30ක් ද වේ.

ඒ අනුව, කුඩා ම පන්ති ප්‍රාන්තරයේ තරම 10 වේ. 50 - 70 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ තරම එමෙන් දෙගුණයකි. පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සංඛ්‍යාතය නිරූපණය කරන තීරුවේ වර්ගඵලය සංඛ්‍යාතයට සමානුපාතික විය යුතු බැවින්,

$$\text{තීරුවේ උස} = \frac{\text{සංඛ්‍යාතය}}{2}$$

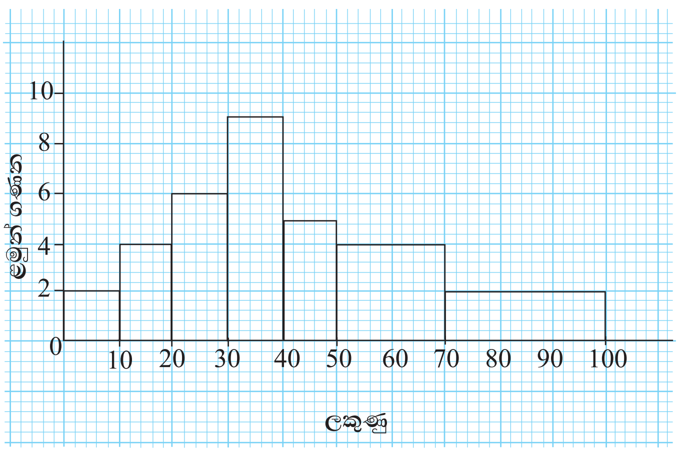
ලෙස ගණනය කරනු ලැබේ.

$$\therefore \ 50 - 70 \text{ පන්ති ප්‍රාන්තරයේ තීරුවේ උස} = \frac{8}{2}$$
$$= 4$$

70 - 100 පන්ති ප්‍රාන්තරයේ තරම කුඩා ම තරම සහිත පන්ති ප්‍රාන්තරයක තරම මෙන් තුන් ගුණයක් වේ.

$$\therefore \ 70 - 100 \text{ පන්ති ප්‍රාන්තරයේ තීරුවේ උස} = \frac{6}{3}$$
$$= 2 \text{ ලෙස ගණනය කරනු ලැබේ.}$$

මෙසේ ගණනය කිරීමෙන් පසු ඇඳි ජාල රේඛය පහත දැක්වේ.



15.1 අභ්‍යාසය

1. එක්තරා ප්‍රදේශයක කාලගුණ මධ්‍යස්ථානයකින් රැස් කළ තොරතුරු ඇසුරෙන් සකස් කළ සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වේ. මෙම තොරතුරු ජාල රේඛයකින් දක්වන්න.

සතියක් තුළ වර්ෂාපතනය mm වලින්	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
සති ගණන	5	6	15	10	7	5	4

2. පාසල් පුස්තකාලයකින් 2015 වර්ෂය තුළ දිනපතා බැහැර ගෙන යෑමට නිකුත් කරන ලද පොත් සංඛ්‍යා දැක්වෙන සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වේ. මෙම තොරතුරු ජාල රේඛයකින් දක්වන්න.

පන්ති ප්‍රාන්තර (නිකුත් කරන ලද පොත් සංඛ්‍යාව)	25 - 29	30 - 34	35 - 39	40 - 44	45 - 49	50 - 54
(සංඛ්‍යාතය) දින ගණන	5	10	20	15	10	7

3. වන වගාවක හෙක්ටාර 10ක තිබූ තේක්ක ගස්වල වට ප්‍රමාණ මැන රැස් කළ දත්ත ඇසුරෙන් සකස් කළ සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වේ. එම දත්ත ජාල රේඛයකින් දක්වන්න.

ගසක වට ප්‍රමාණය (cm)	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60
ගස් සංඛ්‍යාව	6	8	9	15	24	21

4. ග්‍රාමීය ජල ව්‍යාපෘතියකින් එක් දිනක් තුළ නිවෙස් 60ක් ලබා ගත් ජල ප්‍රමාණ පිළිබඳ ව රැස් කළ තොරතුරු ඇසුරෙන් සකස් කළ සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වේ. මෙම තොරතුරු ජාල රේඛයකින් දක්වන්න.

නිවසක් භාවිත කළ ජල ප්‍රමාණ (ආසන්න ලීටරයට)	8 - 12	13 - 17	18 - 22	23 - 27	28 - 32	33 - 37	38 - 42
නිවෙස් සංඛ්‍යාව	4	6	15	15	10	7	3

5. එක්තරා ගමක නිවාස 75ක්, 2015 ජනවාරි මාසය තුළ භාවිත කළ විදුලි ඒකක ගණන පිළිබඳ රැස් කර ගත් තොරතුරු පහත වගුවෙන් දැක්වේ. මෙම තොරතුරු ජාල රේඛයකින් දක්වන්න.

පන්ති ප්‍රාන්තරය (විදුලි ඒකක ගණන)	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 100
සංඛ්‍යාතය (නිවෙස් සංඛ්‍යාව)	10	11	14	16	12	12

6. දුරකථන පහසුකම් සපයන ස්ථානයකින් එක් දිනයක දී ලබා ගන්නා ලද ඇමතුම් සංඛ්‍යාව සහ එක් එක් ඇමතුමකට ගත වූ කාලය පිළිබඳ තොරතුරු පහත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියෙන් දැක්වේ. මෙම තොරතුරු ජාල රේඛයකින් දක්වන්න.

ඇමතුමක් සඳහා ගත කළ කාලය (තත්පර)	30 - 45	45 - 60	60 - 75	75 - 90	90 - 120
ඇමතුම් සංඛ්‍යාව	8	9	12	16	8

15.2 සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය

සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය යනු ජාල රේඛය මෙන් ම සමූහිත දත්ත, ප්‍රස්තාරික ව නිරූපණය කරන ක්‍රමයකි.

සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය ක්‍රම දෙකකට නිර්මාණය කළ හැකි ය.

- සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ ජාල රේඛය ඇසුරෙන්
- පන්ති ප්‍රාන්තරවල මධ්‍ය අගය සහ සංඛ්‍යාතය ඇසුරෙන්

මුලින් ම, ජාල රේඛය ඇසුරෙන් සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය නිර්මාණය කරන අයුරු නිදසුනක් ඇසුරෙන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1

ඉහත නිදසුනක දී භාවිත කළ සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් මේ සඳහා යොදා ගනිමු.

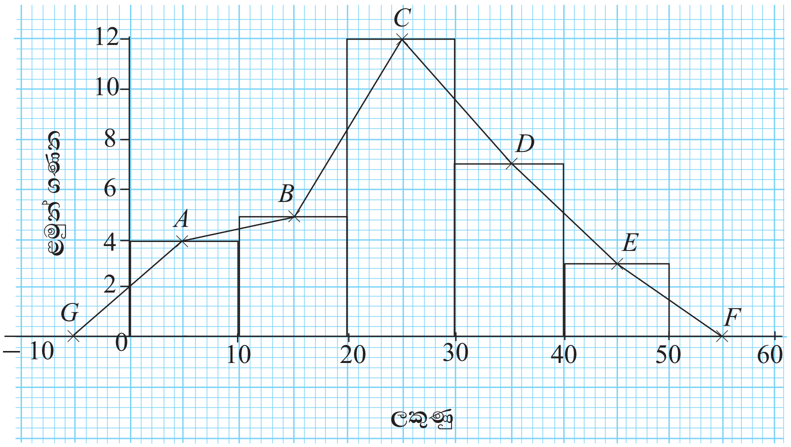
ලකුණු	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
ළමයි සංඛ්‍යාව	4	5	12	7	3

(i) මුලින් ම, දී ඇති තොරතුරුවලට අනුරූප ජාල රේඛය අඳින්න.

(ii) ජාල රේඛයේ එක් එක් තීරුවේ ඉහළ ම පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයෙහි, "×" ලකුණු යොදන්න. (පහත රූපය බලන්න එම "×" ලකුණු A, B, C, D, E ලෙස දක්වා ඇත.)

(iii) මෙම "×" ලකුණු, රූපයේ දැක්වෙන පරිදි පිළිවෙළින්, සරල රේඛා ඛණ්ඩ මගින් යා කරන්න.

(iv) පන්ති ප්‍රාන්තරයක තරමින් අඩක දුරක් (එනම්, මෙහි දී ඒකක 5ක දුරක්) අවසාන තීරුවට දකුණු පසිනුත්, පළමු තීරුවට වම් පසිනුත් තිරස් අක්ෂය මත ලකුණු කරන්න. E හා F ද A හා G ද යා කරන්න.



දැන්, $ABCDEFG$ බහු-අස්‍රයක් ලැබී ඇත. එම බහු-අස්‍රයට සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ **සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය** යැයි කියනු ලැබේ. සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රයේ වර්ගඵලය ජාල රේඛයේ තීරවල වර්ගඵලයට සමාන බව ඔබට හොඳින් නිරීක්ෂණය කළ හොත්, දැක ගත හැකි ය.

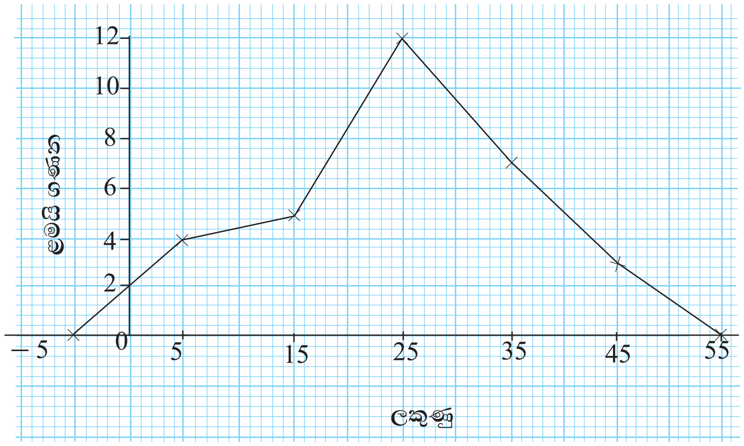
සෑම විට ම ජාල රේඛය ඇඳීමෙන් පසු සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය ඇඳීම අවශ්‍ය නො වේ. පන්ති ප්‍රාන්තරවල මධ්‍ය අගය සහ සංඛ්‍යාතය ඇසුරෙන් ද සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය ඇඳිය හැකි ය. එසේ අඳින අයුරු පහත නිදසුන ඇසුරෙන් විමසා බලමු.

නිදසුන 2

දී ඇති සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය ඇසුරෙන් සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය ඇඳීම සඳහා පන්ති ප්‍රාන්තරවල මධ්‍ය අගය ඇතුළත් වගුවක් සකස් කරන්න.

පන්ති ප්‍රාන්තරය	මධ්‍ය අගය	සංඛ්‍යාතය
0 - 10	5	4
10 - 20	15	5
20 - 30	25	12
30 - 40	35	7
40 - 50	45	3

පන්ති ප්‍රාන්තරවල මධ්‍ය අගය තිරස් අක්ෂය ඔස්සේ ද සංඛ්‍යාතය සිරස් අක්ෂය ඔස්සේ ද ලකුණු කොට, අනුරූප ලක්ෂ්‍ය ලකුණු කරන්න. එම ලක්ෂ්‍ය අනුපිළිවෙළින් සරල රේඛා ඛණ්ඩ මගින් යා කිරීමෙන් ඉහත පරිදි ම සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය ලබා ගත හැකි ය. අන්ත ලක්ෂ්‍ය ද යා කිරීමෙන් සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය ලබා ගන්න.



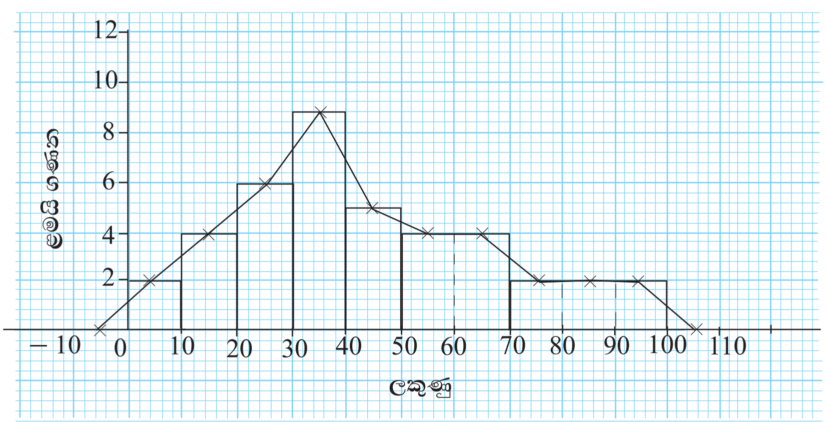
තරම අසමාන පන්ති ප්‍රාන්තර සහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය ඇඳීම පිළිබඳ ව මීළඟට විමසා බලමු.

නිදසුන 3

ඉහත දී යොදා ගත් තරම අසමාන පන්ති ප්‍රාන්තර සහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය සඳහා සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය අඳිමු.

පන්ති ප්‍රාන්තර (ලබාගත් ලකුණු)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 70	70 - 100
සංඛ්‍යාතය (ළමයි සංඛ්‍යාව)	2	4	6	9	5	8	6

අදාළ සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රය පහත දැක්වේ.



මෙහි දී, තරම 20 වූ පන්ති ප්‍රාන්තරය, තරම 10 වන පන්ති ප්‍රාන්ත දෙකකට බෙදා, ඒවායේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යවලට අනුරූප සංඛ්‍යාත සලකා ඇත. එසේ ම, තරම 30 වූ පන්ති ප්‍රාන්තරය, තරම 10 වන පන්ති ප්‍රාන්තර 3කට බෙදා, ඒවායේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යවලට අනුරූප සංඛ්‍යාත ද සලකා ඇත. මෙවිට ද ජාල රේඛයේ වර්ගඵලය, තීරවල වර්ගඵලවල එකතුවට සමාන බව නිරීක්ෂණය කරන්න.

15.2 අභ්‍යාසය

1. පාසලක පවත්වන ලද වෛද්‍ය සායනයක දී ඊට සහභාගී වූ ළමයින්ගේ බර මැනීමෙන් ලබාගත් තොරතුරු ඇසුරෙන් සකස් කළ සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වේ.

ළමයකුගේ ස්කන්ධය (kg)	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55
ළමයි සංඛ්‍යාව	8	10	15	7	15

(i) මෙම තොරතුරු ජාල රේඛයකින් දක්වන්න.
(ii) ජාල රේඛය ඇසුරෙන් සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය අඳින්න.

2. සමාගමක් විසින් නිපදවන ලද විදුලි බුබුළුවල ආයු කාලය පරීක්ෂා කිරීම සඳහා කරන ලද පරීක්ෂණයක දී ලබා ගත් දත්ත අනුව සකස් කරන ලද සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වේ.

පන්ති ප්‍රාන්තර (බල්බයක් දැල්වුණු පැය ගණන)	100 - 300	300 - 400	400 - 500	500 - 600	600 - 700	700 - 800
සංඛ්‍යාතය (බල්බ සංඛ්‍යාව)	12	10	20	25	15	12

(i) සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ ජාල රේඛය අඳින්න.
(ii) ජාල රේඛය ඇසුරෙන් සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය අඳින්න.

3. ක්‍රීඩා සමාජයක සාමාජිකයන්ගේ ශරීර ස්කන්ධය පිළිබඳ රැස් කළ තොරතුරු පහත වගුවේ දක්වා ඇත.

ශරීර ස්කන්ධය (kg)	60 - 65	65 - 70	70 - 75	75 - 80	80 - 85
සාමාජිකයන් සංඛ්‍යාව	10	15	6	4	2

(i) මෙම තොරතුරු ඇසුරෙන් පන්ති ප්‍රාන්තරවල මධ්‍ය අගය සහිත වගුවක් ගොඩනගන්න.
(ii) පන්ති ප්‍රාන්තරවල මධ්‍ය අගය යොදා ගනිමින් සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය අඳින්න.

4. පාසලක 11 ශ්‍රේණියේ ශිෂ්‍ය ශිෂ්‍යාවන් පිරිසක් ගණිතය විෂයය සඳහා ලබා ගත් ලකුණු ඇසුරෙන් සකස් කළ සමූහිත සංඛ්‍යාත වගුවක් පහත දැක්වේ.

ලකුණු පන්ති ප්‍රාන්තර	0 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 100
ළමයි ගණන සංඛ්‍යාතය	6	5	10	7	12

(i) මෙම තොරතුරුවල ජාල රේඛය ඇඳ එමගින් සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය අඳින්න.

5. එක්තරා දිනයක දී දුරකථන පහසුකම් සපයන මධ්‍යස්ථානයකින් ලබාගත් දුරකථන ඇමතුම් සංඛ්‍යාව සහ ඇමතුම් සඳහා ගත වූ කාලය පිළිබඳ රැස් කළ තොරතුරු අනුව පහත දැක්වෙන වගුව සකස් කර ඇත.

දුරකථන ඇමතුමක් සඳහා ගත වූ කාලය (තත්පර)	1 - 4	4 - 7	7 - 10	10 - 13	13 - 16
ඇමතුම් ගණන	3	9	20	12	6

(i) මෙම සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ ජාල රේඛය අඳින්න.

(ii) එම ජාල රේඛය ඇසුරෙන් සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය අඳින්න.

15.3 සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය

මෙය, සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක දත්ත ප්‍රස්තාරිකව නිරූපණය කරන තවත් ක්‍රමයකි. සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳින අයුරු පහත නිදසුන ඇසුරෙන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1

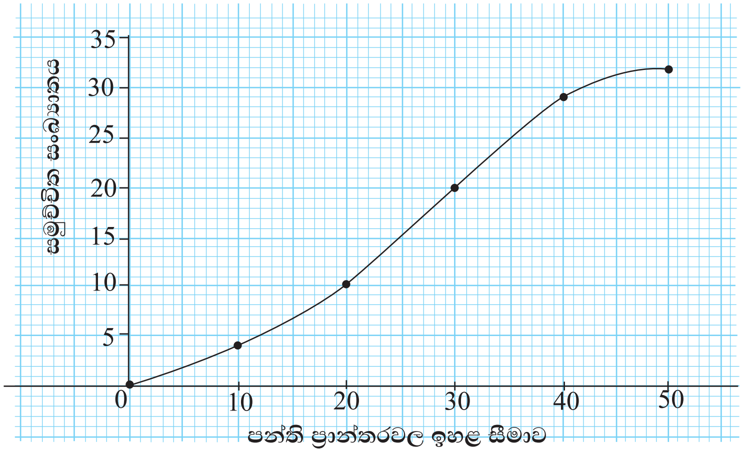
පන්තියක ළමයි 32ක් ගණිත පරීක්ෂණයක දී ලබා ගත් ලකුණු පහත ආකාරයට සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියකින් දක්වා ඇත. එහි සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳිමු.

ලකුණු	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
ළමයි සංඛ්‍යාව	4	6	10	9	3

මුලින් ම, ඉහත වගුව ඇසුරෙන් සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුවක් ගොඩනගමු.

පන්ති ප්‍රාන්තර	සංඛ්‍යාතය	සමුච්චිත සංඛ්‍යාත
0 - 10	4	4
10 - 20	6	10
20 - 30	10	20
30 - 40	9	29
40 - 50	3	32

සමුච්චිත යන්නෙහි තේරුම "එකතු වූ" යන්න යි. ඉහත වගුවේ, නිදසුනක් ලෙස, 20 - 30 පන්ති ප්‍රාන්තරයට අදාළ සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය වන්නේ 30ට වඩා අඩු සියලු සංඛ්‍යාතවල එකතුව යි. (වෙනත් අයුරකින් පැවසුව හොත්, 30ට වඩා අඩුවෙන් ලකුණු ලබා ගත් ළමයි ගණන යි). එය 20 කි. 40 - 50 ප්‍රාන්තරයට අදාළ සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය වන්නේ 50ට අඩුවෙන් ලකුණු ලබා ගත් ළමයි ගණන යි. එනම්, සියලු ළමයි ගණන වන 32 යි. මෙසේ වගුව සකස් කළ පසු සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇඳීම සඳහා, එක් එක් ප්‍රාන්තරයේ ඉහළ සීමාවට එදිරි ව සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය දැක්වෙන ලක්ෂ්‍ය සියල්ල ලකුණු කර, ඉන් පසු, පහත රූපයේ දැක්වෙන අයුරින්, එම ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් සුමට ව යා කළ යුතු ය.



සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක චතුර්ථක හා අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය

ඉහත කොටස්වල දී විමසා බැලුවේ දත්ත සමූහයක ජාල රේඛය, සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය හා සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ලබා ගන්නා ආකාරය යි. එමගින්, දත්ත විසිරී කේන්ද්‍රගත වී ඇති ආකාරය පිළිබඳ අදහසක් ලබා ගැනීම පහසු ය. නිදසුනක් ලෙස, සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක මාත පන්තිය කුමක් ද යන්න ජාල රේඛය දෙස බැලූ සැණින් නිගමනය කළ හැකි ය. එසේ ම, දත්ත සමමිතික ව විසිරී ඇත් ද යන්න පිළිබඳ ව ද අදහසක් ගත හැකි ය. මෙම කොටසේ දී අප ඉගෙනීමට බලාපොරොත්තු වන්නේ දත්ත සමූහයක චතුර්ථක හා අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය පිළිබඳ ව යි. එමගින්, දත්ත විසිරී ඇති ආකාරය පිළිබඳ යම් අදහසක් ලබා ගත හැකි ය.

දත්ත සමූහයක චතුර්ථක හා අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය සෙවීම සඳහා, මුලින් ම කළ යුත්තේ එම දත්ත ආරෝහණ පිළිවෙලට ලියා ගැනීමයි. ඉන්පසු පහත දැක්වෙන පරිදි පළමු චතුර්ථකය (Q_1), දෙවන චතුර්ථකය (Q_2) හා තුන්වන චතුර්ථකය (Q_3) සොයනු ලැබේ.

පියවර 1: මුලින්ම, දත්තවල මධ්‍යස්ථය සොයන්න. මෙය දෙවන චතුර්ථකයයි.

පියවර 2: මධ්‍යස්ථයෙන් වම්පස පිහිටි දත්තවල මධ්‍යස්ථය සොයන්න. මෙය පළමු චතුර්ථකයයි.

පියවර 3: මධ්‍යස්ථයෙන් දකුණු පස පිහිටි දත්තවල මධ්‍යස්ථය සොයන්න. මෙය තුන්වන චතුර්ථකයයි.

නිදසුනක් ලෙස, ආරෝහණ පිළිවෙලට, දත්ත වැලක් (ආවලියක්) ආකාරයෙන් ලියා ඇති පහත දැක්වෙන දත්ත සමූහය සලකන්න.

නිදසුන 1

5, 6, 6, 8, 11, 12, 12, 12, 13, 14, 14, 14, 17, 18, 20, 24, 25, 26, 30

මෙහි ඇති දත්ත ගණන 19 කි. එහි මධ්‍යස්ථය වන්නේ 14 ය (එය කොටුකර දක්වා ඇත)

5, 6, 6, 8, 11, 12, 12, 12, 13, $\boxed{14,}$ 14, 14, 17, 18, 20, 24, 25, 26, 30

දැන් මධ්‍යස්ථයේ වම්පස පිහිටි කොටස සලකන්න.

5, 6, 6, 8, $\boxed{11,}$ 12, 12, 12, 13

එහි මධ්‍යස්ථය වන්නේ 11 යි. එය ද කොටුකර දක්වා ඇත.
අවසාන වශයෙන්, මධ්‍යස්ථයෙන් දකුණුපස පිහිටි දත්ත කොටස සලකන්න.

14, 14, 17, 18, $\boxed{20,}$ 24, 25, 26, 30

එහි මධ්‍යස්ථය වන්නේ 20යි. එය ද කොටුකර දක්වා ඇත.
මේ අනුව,

පළමු චතුර්ථකය $= Q_1 = 11$

දෙවන චතුර්ථකය $= Q_2 = 14$

තුන්වන චතුර්ථකය $= Q_3 = 20$.

නිදසුන 2

ආරෝහණ පිළිවෙලට ලියා ඇති 2, 2, 3, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 11, 11, 12, 12, 15, 15, 16, 17, 20 යන දත්ත 18හි චතුර්ථක සොයමු.

2, 2, 3, 6, 6, 6, 7, 8, $\boxed{8, 11,}$ 11, 12, 12, 15, 15, 16, 17, 20

එහි මධ්‍යස්ථය වන්නේ කොටුකර දක්වා ඇති 8 හා 11 යන දත්ත දෙකෙහි මධ්‍යනායයයි.

එනම්,

$$Q_2 = \frac{8 + 11}{2} = 9.5$$

මධ්‍යස්ථයෙන් වම්පස පිහිටි දත්ත කොටස මෙසේ ය:

$$2, 2, 3, 6, \boxed{6,} 6, 7, 8, 8$$

එහි මධ්‍යස්ථ වන 6 කොටු කර දක්වා ඇත.
එමනිසා, $Q_1 = 6$.

අවසාන වශයෙන්, මධ්‍යස්ථයෙන් දකුණු පස පිහිටි දත්ත කොටස මෙසේ ය:

$$11, 11, 12, 12, \boxed{15,} 15, 16, 17, 20$$

එහි මධ්‍යස්ථය වන 15 කොටුකර දක්වා ඇත.
එමනිසා, $Q_3 = 15$.

නිදසුන 3

පහත දැක්වෙන දත්ත වැලෙහි දත්ත 17 ක් ඇත. එහි චතුර්ථක සොයන්න.

102, 104, 104, 105, 107, 107, 107, 108, 112, 112, 113, 115, 115, 119, 120, 125, 126

ඉහත දී ඇති පියවර අනුගමනය කළ විට ලැබෙන චතුර්ථක පිහිටි ස්ථාන ඊ හිස්වලින් දක්වා චතුර්ථක ගණනය කර ඇති අයුරු වටහා ගන්න.

$$102, 104, 104, \underset{\uparrow}{\boxed{105, 107,}} 107, 107, 108, \underset{\uparrow}{\boxed{112,}} 112, 113, 115, \underset{\uparrow}{\boxed{115, 119,}} 120, 125, 126$$

$$Q_1 = \frac{105 + 107}{2} = 106$$

$$Q_2 = 112$$

$$Q_3 = \frac{115 + 119}{2} = 117$$

නිදසුන 4

පහත දැක්වෙන දත්ත වැලෙහි දත්ත 16ක් ඇත. එහි චතුර්ථක පිහිටි ස්ථාන ඊ හිස් මගින් දක්වා චතුර්ථක ගණනය කර ඇති ආකාරය නිරීක්ෂණය කරන්න.

$$21, 23, 25, \boxed{25, 26,} 28, 28, \boxed{30, 30,} 34, 34, \boxed{35, 37,} 37, 40, 42$$

ඒ අනුව, $Q_1 = \dfrac{25 + 26}{2} = 25.5$, $Q_2 = \dfrac{30 + 30}{2} = 30$, $Q_3 = \dfrac{35 + 37}{2} = 36$.

දත්ත වැලක චතුර්ථක සොයනා ආකාර කිහිපයක්ම සංඛ්‍යානයේ දී භාවිත වේ. මෙහි විස්තර කර ඇති ආකාරය, වඩාත් පහසු මෙන්ම ප්‍රායෝගිකව බොහෝ විට යොදාගන්නා ක්‍රමයකි.

චතුර්ථක සෙවීමේ තවත් ක්‍රමයක් වන්නේ පළමු, දෙවන හා තෙවන චතුර්ථක පිහිටි ස්ථාන

$\dfrac{1}{4}(n + 1)$, $\dfrac{1}{2}(n + 1)$ හා $\dfrac{3}{4}(n + 1)$ යන සූත්‍ර භාවිතයෙන් සොයා ගැනීමයි.

උදාහරණයක් ලෙස, 4 6 7 8 15 18 20 දත්ත වැල සලකන්න.

මෙම සූත්‍රවලට අනුව දී ඇති දත්ත වැලෙහි,

Q_1 පිහිටන්නේ $\dfrac{1}{4}(7 + 1) = 2$ ස්ථානයේය. ඒ අනුව $Q_1 = 6$.

Q_2 පිහිටන්නේ $\dfrac{1}{2}(7 + 1) = 4$ ස්ථානයේය. ඒ අනුව $Q_2 = 8$.

Q_3 පිහිටන්නේ $\dfrac{3}{4}(7 + 1) = 6$ ස්ථානයේය. ඒ අනුව $Q_3 = 18$.

තවත් උදාහරණයක් ලෙස, 9 12 18 20 21 23 24 26 දත්ත වැල ද සලකන්න.

සූත්‍රවලට අනුව දී ඇති දත්ත වැලෙහි,

Q_1 පිහිටන්නේ $\dfrac{1}{4}(8 + 1) = 2.25$ හි ද ඒ අනුව, $Q_1 = 12 + \dfrac{1}{4}(18 - 12) = 13.5$

Q_2 පිහිටන්නේ $\dfrac{1}{2}(8 + 1) = 4.5$ හි ද ඒ අනුව, $Q_2 = \dfrac{20 + 21}{2} = 20.5$

Q_3 පිහිටන්නේ $\dfrac{3}{4}(8 + 1) = 6.75$ හි ද ඒ අනුව, $Q_3 = 23 + \dfrac{3}{4}(24 - 23) = 23.75$

මෙහි දී එකිනෙකට වෙනස් ක්‍රම භාවිතයේ දී පිළිතුරු සඳහා සුළු වෙනස්කම් සහිත පිළිතුරු ලැබිය හැකි ය. සංඛ්‍යානයේ දී පිළිතුරු සඳහා දළ අගයන් (ආසන්න අගයන්) ලබාගන්නා බැවින් එසේ සුළු වෙනස්කම් තිබීම ගැටලු සහගත නොවේ.

දත්ත සමූහයක අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය ලෙස හැඳින්වෙන්නේ තුන්වන චතුර්ථකයෙන් පළමු චතුර්ථකය අඩු කළ විට ලැබෙන අගය යි. එනම්,

එනම්, $\boxed{\text{අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය} = Q_3 - Q_1}$

15.3 අභ්‍යාසය

1. වැඩපළක සේවය කරන සේවකයන් 17 දෙනකුගේ වයස් (අවුරුදු) පිළිවෙළට පහත දැක්වේ.

21, 22, 23, 24, 25, 27, 27, 30, 34, 35, 40, 41, 42, 44, 46, 47, 50

මෙම දත්ත සමූහයේ

(i) මධ්‍යස්ථය
(ii) පළමුවැනි චතුර්ථකය
(iii) තුන්වන චතුර්ථකය
(iv) අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය

සොයන්න.

2. පන්තියක සිටින ළමයි සමූහයකගේ නිවෙස්වල සිටින සාමාජික සංඛ්‍යාව පිළිබඳ රැස් කර ගත් තොරතුරු පහත දැක්වේ.

7, 6, 4, 3, 8, 5, 5, 4, 3, 6, 4, 6, 7, 10, 5

මෙම දත්ත සමූහය ආරෝහණ පිළිවෙලට සකසා එහි

(i) මධ්‍යස්ථය
(ii) පළමුවන චතුර්ථකය
(iii) තුන්වන චතුර්ථකය
(iv) අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය

සොයන්න.

3. 2015 වර්ෂයේ දිනක් තුළ දී නගරයක වෙළෙඳසල් 32ක් විසින් භාවිත කෙරුණු විදුලි ඒකක ගණන පිළිබඳ තොරතුරු පහත වගුවේ දැක්වේ.

විදුලි ඒකක ගණන	2	3	4	5	6	7	8	10
වෙළෙඳසල් සංඛ්‍යාව	5	2	6	6	7	2	3	1

මෙම දත්ත සමූහයේ

(i) මධ්‍යස්ථය

(ii) පළමුවන චතුර්ථකය
(iii) තුන්වන චතුර්ථකය
(iv) අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය
සොයන්න. (ඉඟිය : දත්ත ආවලියක් ලෙස සකස් කර ගන්න.)

15.4 අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය තවදුරටත්

අපි මෙම කොටසේ දී ඉගෙනීමට බලාපොරොත්තු වන්නේ සමූහිත දත්තවල චතුර්ථක හා අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය සොයන ආකාරය පිළිබඳවය. සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය යොදා ගනිමින් ඒවා සොයන ආකාරය පිළිබඳ පමණක් මෙහි විස්තර කෙරේ.
පහත දැක්වෙන නිදසුන ඇසුරෙන් සමූහිත දත්තවල චතුර්ථක හා අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය සොයන අයුරු විමසා බලමු.

නිදසුන 1

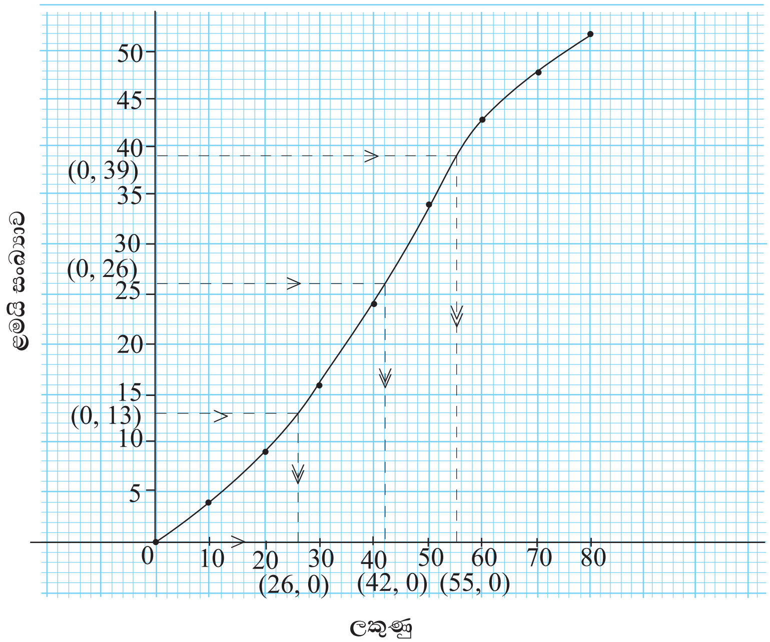
වාර පරීක්ෂණයක දී 11 වන ශ්‍රේණියේ ළමයි සමූහයක් ගණිතය විෂය ට ලබා ගත් ලකුණු ඇසුරෙන් සකස් කළ සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වේ. එම සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය සඳහා සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳිමු.

ලකුණු	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
ළමයි සංඛ්‍යාව	4	5	7	8	10	9	5	4

මෙම වගුවේ දත්ත ඇසුරෙන් සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇඳීම සඳහා අගය වගුවක් ගොඩ නගමු.

පන්ති ප්‍රාන්තර	සංඛ්‍යාතය	සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය
0 - 10	4	4
10 - 20	5	9
20 - 30	7	16
30 - 40	8	24
40 - 50	10	34
50 - 60	9	43
60 - 70	5	48
70 - 80	4	52

15.3 කොටසේ දී උගත් පරිදි සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳිමු.



ඉහත සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය සහිත රූපයේ ඇති තිරස් හා සිරස් රේඛා පිළිබඳ ව දැන් අවධානය යොමු කරමු.

මෙහි මුළු දත්ත ගණන 52කි. එනම්, සංඛ්‍යාතවල එකතුව 52කි. මුලින් ම, එම දත්ත 52හි පළමු, දෙවන හා තුන්වන චතුර්ථක පිහිටි ස්ථාන සොයා ගත යුතු ය.

සටහන: සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇසුරෙන් චතුර්ථක සෙවීමේ දී ඉහත 15.3 කොටසේ දී මෙන් චතුර්ථක සෙවීම අනවශ්‍ය ය. සමූහිත දත්ත විශාල ගණනක් ඇති නිසා (30කට වැඩි ගණනක් විශාල ගණනක් ලෙස මෙහි දී සලකනු ලැබේ), මෙහි දී සංඛ්‍යාතවලින් $\frac{1}{4}$ ක් $\frac{1}{2}$ ක් හා $\frac{3}{4}$ ක් පිහිටන ස්ථාන සොයා ගැනීම ප්‍රමාණවත් ය.

පළමු චතුර්ථකය පිහිටන්නේ සංඛ්‍යාත ආරෝහණ පිළිවෙළට සැකසූ විට, මුළු සංඛ්‍යාත ගණනින් $\frac{1}{4}$ක් වන සංඛ්‍යාතය පිහිටි ස්ථානයේ ය. ඒ අනුව,

$$Q_1 \text{ පිහිටි ස්ථානය} = \frac{1}{4} \times 52 \text{ වන ස්ථානය} = 13 \text{ වන ස්ථානය}$$

$$Q_2 \text{ පිහිටි ස්ථානය} = \frac{1}{2} \times 52 \text{ වන ස්ථානය} = 26 \text{ වන ස්ථානය}$$

$$Q_3 \text{ පිහිටි ස්ථානය} = \frac{3}{4} \times 52 \text{ වන ස්ථානය} = 39 \text{ වන ස්ථානය}$$

දැන්, සංඛ්‍යාත දක්වන සිරස් අක්ෂය මත, 13, 26 හා 39 ලක්ෂ්‍යවලට (සංඛ්‍යාතවලට) අනුරූප දත්ත සෙවිය යුතු ය. ඒ සඳහා අවශ්‍ය රේඛා ඉහත රූප සටහනේ දැක්වේ. නිදසුනක් ලෙස, පළමු චතුර්ථකය සොයන්නේ මෙසේ ය:

පළමු චතුර්ථකය පිහිටි ස්ථානය 13 නිසා, සිරස් අක්ෂය මත 13 හි සිට තිරස් රේඛාවක් ඇඳ, එය වක්‍රය කැපෙන ලක්ෂ්‍යයෙහි සිට සිරස් රේඛාවක්, තිරස් අක්ෂය කැපෙන තෙක් අඳිනු ලැබේ. එම කැපෙන ලක්ෂ්‍යයට අදාළ අගය වන්නේ පළමු චතුර්ථකය යි.

දී ඇති නිදසුන සඳහා මෙසේ චතුර්ථක සෙවූ විට $Q_1 = 26$, $Q_2 = 42$ හා $Q_3 = 55$ ලැබේ.

එමනිසා, අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය $= Q_3 - Q_1 = 55 - 26 = 29$

නිදසුනක් ලෙස, සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක මුළු සංඛ්‍යාතය 51ක් නම්, එවිට පළමු, දෙවන හා තුන්වන චතුර්ථක පිහිටි ස්ථාන පිළිවෙළින්,

$\frac{1}{4} \times 51 = 12.75$ වන ස්ථානය

$\frac{1}{2} \times 51 = 25.5$ වන ස්ථානය

$\frac{3}{4} \times 51 = 38.25$ වන ස්ථානය ලෙස ගත හැකි ය.

ඉන් පසු, සිරස් අක්ෂය මත 12.75, 25.5 හා 38.25 යන අගයන්වලට (හෝ, ඔබගේ ප්‍රස්තාරයේ යොදා ගන්නා පරිමාණය අනුව සුදුසු ලෙස වටයා ලැබෙන අගයන්වලට) අදාළ ව චතුර්ථක සෙවිය හැකි ය.

15.4 අභ්‍යාසය

1. කාර්යාලයක සේවකයන් 2015 වර්ෂයේ දී ලබා ගත් නිවාඩු පිළිබඳ තොරතුරු පහත දැක්වේ.

දින ගණන	0 - 4	4 - 8	8 - 12	12 - 16	16 - 20	20 - 24
සේවකයන් ගණන	10	18	11	8	5	4

(i) ඉහත තොරතුරුවල සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුව ගොඩ නගන්න.
(ii) වගුව ඇසුරෙන් සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳින්න.
(iii) සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇසුරෙන්
  (*a*) සේවකයන්ගේ නිවාඩුවල මධ්‍යස්ථ අගය
  (*b*) දත්තවල අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

2. මාසික පරීක්ෂණයක දී 11 ශ්‍රේණියේ ළමුන් විද්‍යාව විෂයය ට ලබා ගත් ලකුණු පහත වගුවේ දැක්වේ.

ලකුණු පන්ති ප්‍රාන්තරය	0 - 15	15 - 30	30 - 45	45 - 60	60 - 75	75 - 90
ළමයි සංඛ්‍යාව	6	8	12	20	10	4

(i) වගුවේ දත්ත ඇසුරෙන් සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුවක් ගොඩනගන්න.
(ii) සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳින්න.
(iii) සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇසුරෙන්
  (*a*) පළමුවන චතුර්ථකය
  (*b*) දෙවන චතුර්ථකය
  (*c*) තුන්වන චතුර්ථකය
සොයන්න.
(iv) ලබා ගත් ලකුණුවල අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

3. 2015 ජනවාරි මාසයේ ඇගලුම් කම්හලක සේවකයන්ගේ වැටුප් පිළිබඳ තොරතුරු පහත වගුවෙන් දැක්වේ. එම තොරතුරු ඇසුරෙන් දත්තවල සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳින්න. වක්‍රය ඇසුරෙන් සේවකයකුගේ මධ්‍යස්ථ වැටුප හා වැටුප්වල අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

සේවකයකුගේ මාසික වැටුප රුපියල් පන්ති ප්‍රාන්තරය	20000 - 20500	20500 - 21000	21000 - 21500	21500 - 22000	22000 - 22500	22500 - 23000	23000 - 23500	23500 - 24000
සේවකයන් ගණන	8	10	15	18	25	12	9	7

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. නිවාස යෝජනා ක්‍රමයක ඇති නිවෙස් මගින් විදුලිය භාවිතා කිරීම වෙනුවෙන් ගෙවන මාසික ගාස්තු ඇසුරෙන් සකස් කළ වගුවක් පහත දැක්වේ.

මාසික ගාස්තුව (රුපියල්)	0 - 200	200 - 400	400 - 600	600 - 800	800 - 1000
නිවෙස් සංඛ්‍යාව	8	14	24	12	6

(i) මෙම තොරතුරු ඇසුරෙන් සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුවක් ගොඩනගන්න.
(ii) සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳින්න.

(iii) මධ්‍යස්ථය සොයන්න.
(iv) අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

2. කාර්යාලයක සේවකයන්ගේ වයස් පිළිබඳ ව රැස් කරන ලද තොරතුරු ඇසුරෙන් පිළියෙල කරන ලද සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වේ.

වයස (අවුරුදු)	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60
සේවකයන් ගණන	8	12	14	18	16	6	2	2

දී ඇති සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ
(i) ජාල රේඛය අඳින්න.
(ii) සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය අඳින්න.
(iii) සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳින්න.
(iv) සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය ඇසුරෙන් අන්තශ් චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

3. නිවාස 100කින් යුත් නිවාස යෝජනා ක්‍රමයක එක් එක් නිවාසයක් විසින් එක්තරා මාසයක දී පරිභරණය කළ ජල ඒකක ගණන ඇසුරෙන් පහත වගුව පිළියෙල කර ඇත.

ජල ඒකක ගණන	20 - 29	30 - 39	40 - 49	50 - 59	60 - 69	70 - 79
නිවෙස් ගණන	2	8	35	40	10	5

(i) මෙම තොරතුරු ඇසුරෙන්, ජාල රේඛය හා සංඛ්‍යාත බහු-අස්‍රය අඳින්න.
(ii) සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වගුවක් ගොඩනගන්න.
(iii) එම වගුව ඇසුරෙන් සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය අඳින්න.
(iv) මෙම දත්තවල අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය සොයන්න.

16 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩී

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- සංඛ්‍යා අනුක්‍රම අතරින් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩී හඳුනා ගැනීමට
- ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක n වන පදය සඳහා වන සූත්‍රය භාවිත කිරීමට
- ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක පළමු පද n වල ඓක්‍යය සම්බන්ධ සූත්‍ර භාවිත කිරීමට
- ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩිවල යෙදීම් සම්බන්ධ ගැටලු විසඳීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

16.1 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩී

මුලින් ම, ඔබ 10 ශ්‍රේණියේ දී උගත් සමාන්තර ශ්‍රේඩී පිළිබඳ ව නැවත මතක් කර ගනිමු. පහත දැක්වෙන්නේ සමාන්තර ශ්‍රේඩියකි.

5, 7, 9, 11, ...

මෙහි ඕනෑ ම පදයකට 2 යන නියත අගය එකතු වී ඊට පසු පදය ලැබේ. එම නියත අගය, සමාන්තර ශ්‍රේඩියේ පොදු අන්තරය ලෙස හැඳින්විණි.
දැන් පහත දැක්වෙන සංඛ්‍යා අනුක්‍රමය හොඳින් නිරීක්ෂණය කරන්න.

3, 6, 12, 24, 48, 96, ...

මෙම අනුක්‍රමයේ පළමු පදය 3 වේ. පළමු පදය 2න් ගුණ වීමෙන්, දෙවන පදය ද, දෙවන පදය 2න් ගුණ වීමෙන් තෙවන පදය ද ආදී වශයෙන් ලැබෙන බව පැහැදිලි ය.

එනම්, ඕනෑ ම පදයක් 2 යන නියත අගයෙන් ගුණ වී ඊට පසු පදය ලැබේ. වෙනත් ලෙසකින් කිව හොත් පළමු පදය හැර වෙනත් ඕනෑ ම පදයක් ඊට පෙර පදයෙන් බෙදූ විට 2 යන නියත පදය ලැබේ. මෙවැනි ශ්‍රේඩී **ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩී** ලෙස හැඳින්වේ. එම ගුණ වන නියත අගයට ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියේ **පොදු අනුපාතය** යැයි කියනු ලැබේ. ඒ අනුව, මෙම ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියේ පොදු අනුපාතය 2 වේ.

මේ අනුව, සංඛ්‍යා අනුක්‍රමයක් දී ඇති විට, එය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක් දැයි පරීක්ෂා කිරීම පහත පරිදි සිදු කළ හැකි ය. දෙවන පදය, පළමු පදයෙන් බෙදා ලැබෙන අගය සටහන් කර ගන්න. තුන්වන පදය, දෙවන පදයෙන් බෙදා ලැබෙන අගය සටහන් කර ගන්න. හතරවන පදය තුන්වන පදයෙන් බෙදා ලැබෙන අගය සටහන් කර ගන්න. මේ ආදී වශයෙන් කර ගෙන යෑමේ දී එක ම අගය සටහන් වේ නම්, එය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියකි. එසේ එක ම අගයක් ලැබේ නම්, එම සටහන් කර ගන්නා අගය **පොදු අනුපාතය** බව ඔබට පැහැදිලි විය යුතු ය.

නිදසුන 1

2, 6, 18, 54, ... සංඛ්‍යා අනුක්‍රමය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් වේ දැයි පරීක්ෂා කරන්න.

$$\frac{6}{2} = 3, \qquad \frac{18}{6} = 3, \qquad \frac{54}{18} = 3$$

$$\therefore \quad \frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = 3$$

$\therefore$ ඉහත සංඛ්‍යා අනුක්‍රමය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් වේ. තව ද එහි පොදු අනුපාතය 3 වේ.

නිදසුන 2

200, 100, 50, 20, ... සංඛ්‍යා අනුක්‍රමය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් වේ දැයි පරීක්ෂා කරන්න.

$$\frac{100}{200} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{50}{100} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

සෑම විට ම නියත අගයක් නොලැබෙන නිසා මෙය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් නො වේ.

නිදසුන 3

5, – 10, 20, – 40, 80, ... සංඛ්‍යා අනුක්‍රමය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් වේ දැයි පරීක්ෂා කරන්න.

$$\frac{-10}{5} = -2, \qquad \frac{20}{-10} = -2, \qquad \frac{-40}{20} = -2, \qquad \frac{80}{-40} = -2$$

$$\therefore \quad \frac{-10}{5} = \frac{20}{-10} = \frac{-40}{20} = \frac{80}{-40} = -2$$

$\therefore$ මෙම සංඛ්‍යා අනුක්‍රමය පොදු අනුපාතය – 2 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියකි.

නිදසුන 4

4, x, 16 යන පද තුන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක අනුයාත ව පිහිටයි නම්, x හි අගය සොයන්න.

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පිහිටයි නම්, $\frac{x}{4} = \frac{16}{x}$ වේ. මෙම සමීකරණය විසඳීමෙන් අවශ්‍ය x අගය ලැබේ.

$\frac{x}{4} = \frac{16}{x}$ නම් $x^2 = 64$.

එනම් $\quad x^2 - 8^2 = 0$

එනම් $\quad (x - 8)(x + 8) = 0$

එනම්, $\quad x = 8$ හෝ $x = -8$

දැන් මෙම එක් එක් අගය සඳහා 4, x, 16 යන පද තුන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පිහිටන්නේ දැයි බලමු.
$x = 8$ විට, 4, 8, 16 යනු පොදු අනුපාතය 2 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියකි.
$x = -8$ වන විට, 4, -8, 16 යනු පොදු අනුපාතය -2 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියකි.

16.1 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන සංඛ්‍යා අනුක්‍රම අතරින් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪී තෝරා ලියන්න.

(a) 2, 4, 8, ... **(b)** $-6, -18, -54, \ldots$ **(c)** 64, 32, 16, 8, ...

(d) 5, 10, 30, 120, ... **(e)** $-2, 6, -18, 54, \ldots$ **(f)** $81, 27, 3, \frac{1}{9}, \ldots$

(g) 0.0002, 0.002, 0.02, 0.2, ... **(h)** $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{36}, \frac{1}{72}, \ldots$

16.2 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය

මුල් පදය a හා පොදු අන්තරය d වූ සමාන්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය $T_n = a + (n-1)d$ ලෙස ලිවිය හැකි බව ඔබ 10 ශ්‍රේණියේ දී උගත්තේ ය. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය සඳහා ද සූත්‍රයක් ලබා ගන්නා අයුරු දැන් සලකා බලමු.

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය "a" හා පොදු අනුපාතය "r" යන සංකේතවලින් ලියා දක්වමු. තව ද එහි n වන පදය T_n වලින් දක්වමු. නිදසුනක් ඇසුරෙන් T_n සඳහා සූත්‍රයක් ලබා ගන්නා අයුරු සලකා බලමු.

2, 6, 18, 54, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪිය සලකා බලමු. මෙම ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය (a) 2 සහ පොදු අනුපාතය (r) 3 වේ.

එවිට,

$$T_1 = 2 = 2 \times 1 = 2 \times 3^{1-1}$$
$$T_2 = 6 = 2 \times 3 = 2 \times 3^{2-1}$$
$$T_3 = 18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^{3-1}$$
$$T_4 = 54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^{4-1}$$

ලෙස ලිවිය හැකි බව හොඳින් නිරීක්ෂණය කරන්න.

එම පද පළමු පදය (a) සහ පොදු අනුපාතය (r) ඇසුරෙන් දැක්වූ විට

$$T_1 = 2 \times 3^0 = a \times r^{1-1}$$
$$T_2 = 2 \times 3^1 = a \times r^{2-1}$$
$$T_3 = 2 \times 3^2 = a \times r^{3-1}$$
$$T_4 = 2 \times 3^3 = a \times r^{4-1}$$ ලෙස ලිවිය හැකි ය.

මෙම රටාව අනුව, n වන පදය, $T_n = ar^{n-1}$ ලෙස දැක්විය හැකි බව නිරීක්ෂණය කරන්න.

පළමු පදය a ද පොදු අනුපාතය r ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය $T_n = ar^{n-1}$ මගින් ලබා දෙයි.

නිදසුන 1

මුල් පදය 3 හා පොදු අනුපාතය 2 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 5 වන පදය සොයන්න.

$$a = 3,\ r = 2, n = 5$$

$$\begin{aligned} T_n &= ar^{n-1} \\ T_5 &= 3 \times 2^{5-1} \\ &= 3 \times 2^4 \\ &= 3 \times 16 \\ &= 48 \end{aligned}$$

එමනිසා, පස් වන පදය 48 වේ.

නිදසුන 2

81, 27, 9, ... ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පස් වන පදය හා හත් වන පදය සොයන්න.

$$a = 81$$

$$r = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$$

$$T_n = ar^{n-1}$$

$$\therefore \quad \begin{aligned} T_5 &= 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{5-1} \\ &= 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \\ &= 81 \times \frac{1}{81} \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} T_7 &= 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1} \\ &= 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6 \\ &= 81 \times \frac{1}{729} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

එමනිසා, පස් වන පදය 1 ද හත් වන පදය $\frac{1}{9}$ ද වේ.

16.2 අභ්‍යාසය

1. පළමු පදය 5 සහ පොදු අනුපාතය 2 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියේ 6 වන පදය සොයන්න.

2. පළමු පදය 4 සහ පොදු අනුපාතය -2 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියේ 6 වන පදය හා 8 වන පදය සොයන්න.

3. පළමු පදය -2 ද පොදු අනුපාතය -3 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියේ 4 වන පදය සහ 7 වන පදය සොයන්න.

4. පළමු පදය 1000 සහ පොදු අනුපාතය $\frac{1}{5}$ වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියේ 6 වන පදය සොයන්න.

5. 0.0002, 0.002, 0.02,... ශ්‍රේඩියේ 6 වන පදය සොයන්න.

6. $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{2},...$ ශ්‍රේඩියේ 5 වන පදය සොයන්න.

7. 75, -30, 12,... ශ්‍රේඩියේ 4 වන පදය සොයන්න.

8. 192, 96, 48,... ශ්‍රේඩියේ 7 වන පදය සොයන්න.

9. 0.6, 0.3, 0.15,... ශ්‍රේඩියේ 9 වන පදය සොයන්න.

10. 8, 12, 18,... ශ්‍රේඩියේ 10 වන පදය සොයන්න.

16.3 $T_n = ar^{n-1}$ සූත්‍රය භාවිතය

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියක, පළමු පදය (a), පොදු අනුපාතය (r), n වන පදය T_n හා n අගයන් අතුරින් එකක් හැර ඉතිරි අගය දී ඇති විට, එම අගය $T_n = ar^{n-1}$ සූත්‍රයට ආදේශ කිරීමෙන් ඉතිරි අගය සෙවිය හැකි ය.

ඒ සඳහා නිදසුන් කීපයක් දැන් සලකා බලමු.

නිදසුන 1

පොදු අනුපාතය 3 ද 4 වන පදය 54 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඩියේ පළමු පදය සොයන්න.

$$r = 3,\ n = 4,\ T_n = 54$$

$$T_n = ar^{n-1}$$

$$\therefore\ T_4 = a \times (3)^{4-1}$$

$$\therefore\ 54 = a \times (3)^3$$

$$\therefore\ 54 = a \times 27$$

$$\therefore\ a = \frac{54}{27}$$

$$= 2$$

ශ්‍රේඩියේ පළමු පදය 2 වේ.

නිදසුන 2

පළමු පදය 5 සහ 7 වන පදය 320 ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය සොයා, එහි මුල් පද 5 සොයන්න.

$$a = 5,\ n = 7,\ T_7 = 320$$
$$T_n = ar^{(n-1)}$$
$$T_7 = 5 \times (r)^{7-1}$$
$$\therefore\ 320 = 5 \times (r)^6$$
$$\therefore\ r^6 = \frac{320}{5}$$
$$= 64$$
$$= (+2)^6 \text{ හෝ } (-2)^6$$
$$\therefore\ r = 2 \text{ හෝ } -2$$

පොදු අන්තරයට අගය දෙකක් ලැබෙන නිසා ඉහත අවශ්‍යතාවලට සරිලන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් පවතී.

$r = 2$ වූ ශ්‍රේඪියේ මුල් පද පහ 5, 10, 20, 40, 80 වේ.
$r = -2$ වූ ශ්‍රේඪියේ මුල් පද පහ 5, –10, 20, – 40, 80 වේ.

නිදසුන 3

පළමු පදය 64 සහ පොදු අනුපාතය $\frac{1}{4}$ වූ ශ්‍රේඪියේ $\frac{1}{64}$ වන්නේ කීවන පදය ද?

$$a = 64,\ r = \frac{1}{4},\ T_n = \frac{1}{64}$$
$$T_n = ar^{n-1}$$
$$\frac{1}{64} = 64 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{(n-1)}$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{64 \times 64}$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{4^6}$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} = \left(\frac{1}{4}\right)^6$$
$$(n-1) = 6$$
$$n = 6 + 1$$
$$= 7$$

$\therefore\ \frac{1}{64}$ වන්නේ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 7 වන පදය යි.

නිදසුන 4

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය 160 සහ 6 වන පදය 1215 වේ. ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය සොයන්න.

$$a = 160,\ T_6 = 1215,\ n = 6$$

$$T_n = ar^{(n-1)}$$

$$1215 = 160\,(r)^{6-1}$$

$$160r^5 = 1215$$

$$\therefore \quad r^5 = \frac{1215}{160}$$

$$= \frac{243}{32}$$

$$= \frac{3^5}{2^5}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

$$\therefore\ r = \frac{3}{2}$$

$$= 1\frac{1}{2}$$

$\therefore$ ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය $1\frac{1}{2}$ වේ.

එසේම ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ ඕනෑම පද දෙකක් දී ඇති විට $T_n = ar^{n-1}$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් පළමු පදය සහ පොදු අන්තරය සෙවිය හැකි ය. එවැනි නිදසුනක් දැන් සලකා බලමු.

නිදසුන 5

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක 3 වන පදය 48 ද 6 වන පදය 3072 ද වේ. ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය ද පළමු පදය ද සොයන්න.

මුලින් ම, දී ඇති දත්ත ඇසුරෙන් සමීකරණ දෙකක් ගොඩනගමු.

$$T_n = ar^{n-1}$$

$$T_3 = ar^{(3-1)}$$

$$ar^2 = 48 \quad \text{①}$$

$$T_6 = ar^{(6-1)}$$

$$ar^5 = 3072 \quad \text{②}$$

මෙම 1 හා 2 සමීකරණවල a හා r යන විචල්‍ය දෙක ම අඩංගු ය. එයින් a විචල්‍යය ඉවත් කර ගැනීම පහසු ය. ඒ සඳහා මෙම සමීකරණ දෙක බෙදමු.

$② \div ①$ $\quad \dfrac{ar^5}{ar^2} = \dfrac{3072}{48}$

$r^3 = 64$

$r^3 = 4^3$

$r = 4$

$r = 4$ ① ට ආදේශයෙන්

$ar^2 = 48$

$a\,(4)^2 = 48$

$16a = 48$

$a = \dfrac{48}{16}$

$a = 3$

ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය $= 3$

පොදු අනුපාතය $= 4$

නිදසුන 6

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක 6 වන පදය -8 ද 10 වන පදය -128 ද වේ.

(i) මෙම අගයන්ට ගැළපෙන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් ඇති බව පෙන්වන්න.

(ii) එක් එක් ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 5 ලියන්න.

(i) $T_n = ar^{(n-1)}$

$T_6 = ar^{(6-1)}$

$ar^5 = -8$ ——— ①

$T_{10} = ar^{(10-1)}$

$ar^9 = -128$ ——— ②

$② \div ①$ $\quad \dfrac{ar^9}{ar^5} = \dfrac{-128}{-8}$

$r^4 = 16$

$r^4 = 2^4$ හෝ $(-2)^4$

$r = 2$ හෝ -2

පොදු අනුපාතයට අගයන් දෙකක් ලැබෙන බැවින් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් පවතී.

(ii) $r = 2$, ① ට ආදේශයෙන්

$ar^5 = -8$

$a\,(2)^5 = -8$

$a \times 32 = -8$

$a = \dfrac{-8}{32}$

$a = -\dfrac{1}{4}$

$r = 2$ සහ $a = -\dfrac{1}{4}$ වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද $-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{2}, -1, -2, -4$ වේ.

$r = -2$, ① ට ආදේශයෙන්

$$ar^5 = -8$$
$$a(-2)^5 = -8$$
$$a \times (-32) = -8$$
$$a = \frac{-8}{-32}$$
$$a = \frac{1}{4}$$

$r = -2$ සහ $a = \frac{1}{4}$ වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, -2, 4$ වේ.

16.3 අභ්‍යාසය

1. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පොදු අනුපාතය 3 සහ 4 වන පදය 108 වේ. ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය සොයන්න.

2. 6 වන පදය 1701 සහ පොදු අනුපාතය 3 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය සොයන්න.

3. පොදු අනුපාතය $\frac{1}{2}$ සහ 8 වන පදය 96 ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය සොයන්න.

4. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය 5 ද, 4 වන පදය 135 ද වේ. ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය සොයන්න.

5. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය 7 ද පොදු අනුපාතය 2 ද වේ. 448 වන්නේ ශ්‍රේඪියේ කීවන පදය ද?

6. පළමු පදය $\frac{1}{32}$ ද පොදු අනුපාතය 2 ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක 256 වන්නේ කීවන පදය ද?

7. පළමු පදය 27 සහ පොදු අනුපාතය $\frac{2}{3}$ වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක $3\frac{5}{9}$ වන්නේ කීවන පදය ද?

8. පළමු පදය 8 ද 6 වන පදය -256 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 5 ලියන්න.

9. පළමු පදය 64 ද 9 වන පදය $\frac{1}{4}$ ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් ඇති බව පෙන්වා එම එක් එක් ශ්‍රේඪියේ මුල් පද තුන ලියා දක්වන්න.

10. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක 4 වන පදය 48 ද 7 වන පදය 384 ද වේ. ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය සහ පළමු පදය සොයන්න.

11. 3 වන පදය -45 සහ පස්වන පදය -1125 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් ඇති බව පෙන්වන්න.

12. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක 4 වන පදය 100 ද 9 වන පදය $3\frac{1}{8}$ ද වේ. ශ්‍රේඪියේ මුල් පද පහ ලියන්න.

13. පස්වන පදය 40 ද 9 වන පදය 640 ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් ඇති බව පෙන්වා, එක් එක් ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 5 ලියන්න.

16.4 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද n වල ඓක්‍යය

මුල් පදය a ද පොදු අනුපාතය r ද වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද n හි ඓක්‍යය S_n මගින් දක්වමු. S_n සඳහා සූත්‍රයක් ගොඩනගන අයුරු දැන් විමසා බලමු.

$T_1 = a,\ T_2 = ar,\ T_3 = ar^2,\ T_4 = ar^3,\ ....,\ T_n = ar^{(n-1)}$ ලෙස ලිවිය හැකි ය.

$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + ... + T_n$

$\therefore\ S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{(n-1)}$ ——— (1) ලෙස ලිවිය හැකි ය.

S_n සඳහා සූත්‍රය ගොඩනැගීමේ දී යොදා ගන්නා උපක්‍රමය මෙසේ ය. මුලින් ම, (1) සමීකරණයේ දෙපස ම r වලින් ගුණ කරමු. එවිට,

$r\,S_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ... + ar^n$ ——— (2) ලෙස ලැබේ.

දැන්, (2) සමීකරණයෙන් (1) සමීකරණය අඩු කරමු. එවිට,
$r\,S_n - S_n = ar^n - a$ (දකුණු පස බොහෝ පද අවලංගු වී යන බව නිරීක්ෂණය කරන්න)

$$\therefore\ S_n\,(r-1) = a\,(r^n - 1)$$

$$\therefore\ S_n = \frac{a\,(r^n-1)}{(r-1)} \qquad (r \neq 1)$$

මෙය, a, r, n හා S_n අඩංගු සූත්‍රයයි. මෙම සූත්‍රයේ හරය හා ලවය -1 න් ගුණ කිරීමෙන් සූත්‍රය වෙනත් හැඩයකින් ද මෙසේ දැක්විය හැකි ය.

$$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{(1-r)}$$

S_n සඳහා $S_n = \dfrac{a\,(r^n-1)}{(r-1)}$ සහ $S_n = \dfrac{a\,(1-r^n)}{(1-r)}$

යන සූත්‍ර දෙකෙන් ඕනෑ ම එකක් භාවිත කළ හැකි ය.

නිදසුන 1

2, 6, 18, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 5හි ඓක්‍යය, පද සොයා එකතු කිරීමෙන් හා සූත්‍රය භාවිතයෙන් වෙන වෙන ම සොයන්න.
මුලින් ම පද සොයා එකතු කිරීමෙන් ඓක්‍යය සොයමු.

$T_1 = 2$, $T_2 = 6$ හා $T_3 = 18$ ලෙස දී ඇත.

තව ද,

$T_4 = 18 \times 3 = 54$ ද

$T_5 = 54 \times 3 = 162$ ද වේ.

එමනිසා, $S_5 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$

$= 2 + 6 + 18 + 54 + 162$

$= 242$

දැන් $S_n = \dfrac{a\,(r^n - 1)}{(r - 1)}$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් ඓක්‍යය සොයමු.

$a = 2,\ r = \dfrac{6}{2} = 3,\ n = 5$ නිසා

$$S_n = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_5 = \frac{2\,(3^5 - 1)}{3 - 1}$$

$$= \frac{2\,(243 - 1)}{2}$$

$$= \frac{2 \times 242}{2}$$

$$= 242$$

මුල් පද පහෙහි ඓක්‍යය 242 වේ.

පදවල අගයන් විශාල වන විට දී හෝ පද ගණන විශාල වන විට දී සූත්‍රය භාවිතය වඩා පහසු ය.

නිදසුන 2

120, – 60, 30, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 6හි ඓක්‍යය සොයන්න. ඒ සඳහා සූත්‍රය භාවිත කරමු.

$a = 120,\ r = \frac{-60}{120} = -\frac{1}{2},\ n = 6$ නිසා

$S_n = \frac{a\,(1 - r^n)}{1 - r}$ හි ආදේශයෙන්,

$$S_6 = \frac{120\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{120\left[1 - \left(\frac{1}{64}\right)\right]}{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \left[120 \times \frac{63}{64}\right] \div \frac{3}{2}$$

$$= \left[120 \times \frac{63}{64}\right] \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{315}{4}$$

$$= 78\,\frac{3}{4}$$

මුල් පද පහෙහි ඓක්‍යය $78\,\frac{3}{4}$ වේ.

$S_n = \frac{a\,(1 - r^n)}{1 - r}$ සූත්‍රයේ අඥාත හතරක් ඇත. ඒවා නම් a, r, n හා S_n ය. මෙම අඥාතවලින් ඕනෑ ම තුනක් දුන් විට ඉතිරි අගය සෙවිය හැකි ය. දැන් එවැනි නිදසුනක් විමසා බලමු.

නිදසුන 3

5, 15, 45, ... ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල්පදවල ඓක්‍යය 1820 වීමට එකතු කළ යුතු පද ගණන සොයන්න.

$$a = 5,\ r = \frac{15}{5} = 3,\ S_n = 1820$$

$$S_n = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$1820 = \frac{5\,(3^n - 1)}{3 - 1}$$

$$1820 = \frac{5\,(3^n - 1)}{2}$$

$$2 \times 1820 = 5\,(3^n - 1)$$

$$\frac{2 \times 1820}{5} = 3^n - 1$$

$$728 = 3^n - 1$$

$$1 + 728 = 3^n$$

$$729 = 3^n$$

$$3^6 = 3^n$$

$$n = 6$$

එකතු කළ යුතු පද ගණන 6 කි.

16.4 අභ්‍යාසය

1. පළමු පදය 4 සහ පොදු අනුපාතය 3 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 5හි ඓක්‍යය, පද සොයා එකතු කිරීමෙන් හා සූත්‍රය භාවිතයෙන් සොයන්න.

2. 2, 8, 32, ... ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 5හි ඓක්‍යය සොයන්න.

3. පළමු පදය 72 සහ පොදු අනුපාතය $\frac{1}{3}$ වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 6 හි එකතුව සොයන්න.

4. 3, – 6, 12, ... ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 7 හි ඓක්‍යය සොයන්න.

5. 18, 12, 8, ... ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 6 හි ඓක්‍යය සොයන්න.

6. 18, 6, 2, ... ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 6 හි ඓක්‍යය $26\frac{26}{27}$ බව පෙන්වන්න.

7. 2, 4, 8, ... ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද යම් ගණනක ඓක්‍යය 2046 වේ නම්, එම පද ගණන සොයන්න.

8. පළමු පදය 4 ද පොදු අනුපාතය 2 ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පදවල ඓක්‍යය 1020 වීමට එකතු කළ යුතු පද සංඛ්‍යාව සොයන්න.

9. 3, – 12, 48, ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පදවල ඓක්‍යය 9831 වීම සඳහා එකතු කළ යුතු පද ගණන සොයන්න.

16.5 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪී ආශ්‍රිත ගැටලු විසඳීම

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪී සම්බන්ධ ව, ඉහත නිදසුන් මගින් සාකච්ඡා නොකළ විවිධ ආකාරයේ ගැටලු විසඳන අයුරු නිදසුන් කීපයක් මගින් දැන් සලකා බලමු.

නිදසුන 1

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු හා දෙවන පදවල එකතුව 9 වේ. 4 වන පදයේ සහ 5 වන පදයේ එකතුව – 72 වේ. ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 5 ලියන්න.

$T_1 = a, \;\; T_2 = ar$

$$a + ar = 9$$

$$a(1 + r) = 9 \quad \text{———} \; (1)$$

$T_4 = ar^3, \;\; T_5 = ar^4$

$$ar^3 + ar^4 = -72$$

$$ar^3(1 + r) = -72 \quad \text{———} \; (2)$$

(2) ÷ (1)

$$\frac{ar^3(1 + r)}{a(1 + r)} = \frac{-72}{9}$$

$$r^3 = -8$$

$$r^3 = (-2)^3$$

$$r = -2$$

$r = -2$, (1) ආදේශයෙන්

$$a[1 + (-2)] = 9$$

$$a \times (-1) = 9$$

$$a = -9$$

ශ්‍රේඪියේ මුල් පද පහ

–9, 18, –36, 72, –144 වේ.

නිදසුන 2

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද තුන පිළිවෙළින් $(x + 2)$, $(x + 12)$, $(x + 42)$ වේ. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පදය සහ පොදු අනුපාතය සොයන්න.

$$r = \frac{x + 12}{x + 2} = \frac{x + 42}{x + 12}$$

$$\frac{x+12}{x+2} = \frac{x+42}{x+12}$$

$$(x + 12)(x + 12) = (x + 2)(x + 42)$$
$$x^2 + 24x + 144 = x^2 + 44x + 84$$
$$144 - 84 = 20x$$
$$60 = 20x$$
$$x = \frac{60}{20}$$
$$x = 3$$

ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 3

$(3 + 2), (3 + 12), (3 + 42)$

$5, 15, 45$

ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය $= 5$

ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය $= \frac{15}{5}$

$= 3$

16.5 අභ්‍යාසය

1. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක දෙවන හා තුන්වන පදවල එකතුව 21 හා පස්වන සහ හයවන පදවල එකතුව 168වේ. ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 5 ලියන්න.

2. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද තුන පිළිවෙළින් 4, $(x + 3)$ සහ $(x + 27)$ වේ.
   (i) xවල අගය සොයන්න.
   (ii) දී ඇති අගයන්ට ගැළපෙන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් ඇති බව පෙන්වා, එක් එක් ශ්‍රේඪියේ මුල්පද 4 ලියන්න.

3. ශ්‍රේඪියක මුල් පද nවල ඓක්‍යය $4\ (3^n - 1)$ වේ.
   (i) ශ්‍රේඪිය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් බව පෙන්වන්න.
   (ii) එහි මුල් පද 4 ලියන්න.

4. සමාන්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය, තුන්වන පදය හා 6 වන පදය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද 3 වේ. සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ 5 වන පදය 15 නම්, ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 4 ලියන්න.

5. ශ්‍රේඪියක n වන පදය $3(2)^{n+1}$ වේ.
   (i) ශ්‍රේඪිය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් බව පෙන්වන්න.
   (ii) ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය හා පොදු අනුපාතය සොයන්න.

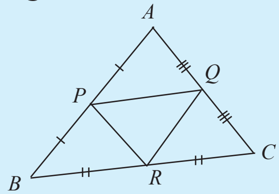
6. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය 9වේ. එහි මුල් පද තුනෙහි එකතුව 7 වේ.
   (i) මෙම අගයන්ට ගැළපෙන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් ඇති බව පෙන්වන්න.
   (ii) එක් එක් ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 4 ලියන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාස - 2 වන වාරය

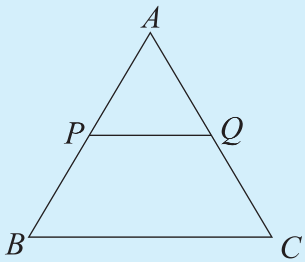
I කොටස

1. 5, 3, 7, 13, 11, 9, 7, 10, 2, 3, 7 යන සංඛ්‍යා සමූහයේ,

   (i) මාතය (ii) මධ්‍යස්ථය (iii) මධ්‍යන්‍යය (iv) අන්තශ්චතුර්ථක පරාසය
   ලියන්න.



2. ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය 24 cm නම් PQR ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය කීය ද?



3. ABC ත්‍රිකෝණයේ AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය P හා Q වේ. APQ ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය 21 cm නම් ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය කීය ද?

4. කොටස් වෙළඳපොළ සමග ගනුදෙනු කරන ව්‍යාපාරිකයෙක්, එක්තරා සමාගමක කොටස්, එම කොටසක වෙළඳ පොළ මිල රු 50 ක් ව තිබිය දී, මිල දී ගත්තේ ය. පසුව එම කොටසක මිල රුපියල් 58ක් වූ විට, ඔහු එම කොටස් විකුණන ලදි. මෙම ආයෝජනයෙන් ව්‍යාපාරිකයා ලැබූ ප්‍රාග්ධන ලාභ ප්‍රතිශතය සොයන්න.

5. කවිඳු අත්පිට මුදලට රුපියල් 15000 ක් වූ භාණ්ඩයක්, මුලින් රුපියල් 3000 ක් ගෙවා හීනවන ශේෂ ක්‍රමය යටතේ ලබා ගත්තේ ය. ඉතිරි මුදල මසකට රුපියල් 1464 බැගින් වූ සමාන මාසික වාරික 10 කින් ගෙවා ණයෙන් නිදහස් විය. භාණ්ඩය සඳහා ගෙවා ඇති මුළු මුදල සොයන්න.

6. $x^2 - ax + 18 = 10$ හි එක් මූලයක් $x = 2$ නම්

   (i) a හි අගය සොයන්න.

   (ii) සමීකරණයේ අනිත් මූලය සොයන්න.

7. $(x - 2)^2 = x - 2$ නම් x හි විසඳුම් සොයන්න.

8. $3x^2 - 27 = 0$ හි විසඳන්න.

9. අනුගාමී ධන සංඛ්‍යා දෙකක වර්ගයන්ගේ එකතුව 145 කි. සංඛ්‍යා දෙක සොයන්න.

10. $y = x^2 + 6x + 5$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය නොඇඳ,

(i) සමමිති අක්ෂයේ සමීකරණය

(ii) ශ්‍රිතයේ අවම අගය

සොයන්න.

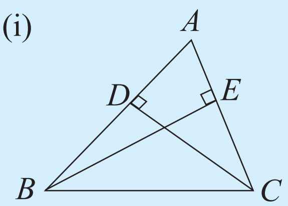
11. $y = (x - 2)(x + 1)$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය x අක්ෂය ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යවල x හි ඛණ්ඩාංක ලියන්න.

12. $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$ හා $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$ නම් x හා y හි අගයයන් සොයන්න.

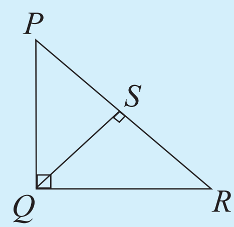
13. $T_n = 2 \times 3^n$ මගින් දැක්වෙන්නේ කවර වර්ගයේ ශ්‍රේඪියක් දැයි හේතු දක්වමින් පෙන්වන්න.

14. ABC ත්‍රිකෝණයේ $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 4$ cm වේ. x යනු BC පාදය මත පිහිටි විචල්‍ය ලක්ෂ්‍යයකි. AX හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය P නම්, P හි පථය විස්තර කරන්න.

15. (i)



(ii)



රූප සටහන,

(i) හි ABE හා ADC ත්‍රිකෝණ යුගලය

(ii) හි PQS හා QSR ත්‍රිකෝණ යුගලය සමකෝණික බව පෙන්වන්න.

II කොටස

1. සෘජුකෝණාස්‍රයක දිග ඒකක 6 කින් අඩුකර, පළල ඒකක 2කින් වැඩි කළ විට, එහි වර්ගඵලය මුල් වර්ගඵලයට වඩා වර්ග ඒකක 12කින් අඩු වේ. සෘජුකෝණාස්‍රයේ මුල් දිග හා පළල පිළිවෙලින් x හා y ලෙස ගෙන

(i) දෙවන සෘජුකෝණාස්‍රයේ දිග හා පළල x හා y ඇසුරෙන් දක්වන්න.
(ii) දෙවන සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය x හා y ඇසුරෙන් දක්වන්න.
(iii) x හා y ඇතුළත් සමීකරණයක් ගොඩනගන්න.
(iv) මුල් සෘජුකෝණාස්‍රයේ දිග එහි පළල මෙන් තුන් ගුණයක් වන බව පෙන්වන්න.
(v) මුල් සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය වර්ග ඒකක 192 ක් නම් එහි දිග හා පළල සොයන්න.

2. පොදු අනුපාතය ධන අගයක් ගන්නා ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක තුන්වන පදය, දෙවන පදයට වඩා 3කින් ද පස්වන පදය, හතරවන පදයට වඩා 12කින් ද වැඩි වේ.

(i) ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය හා මුල් පදය සොයන්න.
(ii) ශ්‍රේඪියේ මුල් පද පහ ලියා දක්වන්න.
(iii) ශ්‍රේඪියේ n වන පදය $3 \times 2^{n-2}$ බව පෙන්වන්න.

3. කොටස් වෙළඳ පොළේ මුදල් ආයෝජනය කරන්නෙක්, ලාභාංශ ලෙස වාර්ෂිකව කොටසකට රු 1.25 බැගින් ගෙවන A නම් සමාගමේ කොටස් 5000 ක් ද, වාර්ෂිකව කොටසකට රු 1.50 ක් බැගින් ගෙවන B නම් සමාගමේ කොටස් යම් ප්‍රමාණයක් ද වෙනුවෙන් මුදල් ආයෝජනය කර තිබුණි. A හා B සමාගම්වල කොටසක වෙළඳ පොළ මිල පිළිවෙලින් රුපියල් 30 හා 35 වූ අවස්ථාවක, ඔහු සතු එම සමාගම්වල සියලුම කොටස් විකුණා වාර්ෂිකව කොටසකට රු 2.50 බැගින් ගෙවන C නම් සමාගමේ කොටස් රුපියල් 50 බැගින් මිල දී ගත්තේ ය. ඉන් ඔහුගේ ලාභාංශ ආදායම රුපියල් 12750 ක් විය.

(i) B සමාගමේ ඔහු සතුව තිබූ කොටස් ගණන සොයන්න.
(ii) නව ආයෝජනයෙන් ඔහුගේ වාර්ෂික ලාභාංශ ආදායම රුපියල් 2000කින් වැඩි වූ බව පෙන්වන්න.

4. මිනිසෙක් 8% වාර්ෂික වැල් පොළී අනුපාතිකයක් යටතේ අවුරුදු දෙකකින් ගෙවා අවසන් කිරීමේ පොරොන්දුව මත, රුපියල් 10 000ක් ණයට ගත්තේ ය. එහෙත් ඔහුට අවුරුදු දෙක අවසානයේ පොරොන්දුව අනුව, ණය ගෙවා දැමීමට නොහැකි විය. ණය හිමියාට අවුරුදු දෙක අවසානයේ, රුපියල් 6000ක් ගෙවා දැමූ ඔහු තවත් ඉදිරියට අවුරුද්දකින්, පොළියත් සමඟ ණය ගෙවා අවසන් කිරීමටත්, පොරොන්දු වූ පොළියට වඩා වැඩි පොළියක් එම අවුරුද්ද සඳහා ගෙවීමටත් ණය හිමියා එකඟ කරවා ගත්තේ ය.

(i) පළමු අවුරුද්ද අවසානයේ ගෙවීමට නියමිත පොළිය ගණනය කරන්න.
(ii) දෙවන අවුරුද්ද අවසානයේ ණය නිදහස් වීමට නම් ගෙවිය යුතු මුළු මුදල ගණනය කරන්න.
(iii) තුන්වන අවුරුද්ද ආරම්භයේ දී, ගෙවීමට ඉතිරිවන මුදල කීයද?
(iv) තුන්වන අවුරුද්ද අවසානයේ පොරොන්දු වූ පරිදි රුපියල් 6230.40 ක් ගෙවා ණයෙන් නිදහස් වූයේ නම්, තුන්වන අවුරුද්ද සඳහා ගෙවා ඇති පොළී අනුපාතිකය සොයන්න.

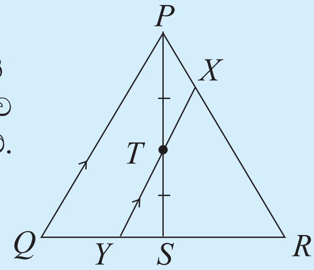
5. $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ AC විකර්ණයට සමාන්තරව B හරහා ඇඳි රේඛාව දික් කළ DC පාදයට E හිදි හමු වේ. AE හා BC රේඛා P හිදී ද AC හා BD විකර්ණ Q හිදී ද කැපී යයි.

(i) ඉහත දත්ත ඇතුළත් දළ සටහනක් අඳින්න.

(ii) $ABEC$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.

(iii) $PQ = \frac{1}{4}\ DE$ බව සාධනය කරන්න.

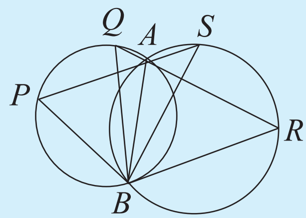
6. PQR ත්‍රිකෝණයේ, QR පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය S වේ. PS හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය T වන අතර T හරහා PQ ට සමාන්තරව ඇඳි රේඛාව, PR පාදය X හිදී ද QR පාදය Y හිදී ද හමුවේ.



(i) $YT = \frac{1}{2}\ PQ$ බව සාධනය කරන්න.

(ii) $XY = \frac{3}{4}\ PQ$ බව සාධනය කරන්න.

7. (a) දී ඇති රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු මත

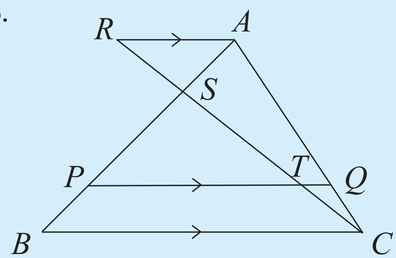


(i) $A\hat{P}B$ ට සමාන කෝණයක් නම් කරන්න.

(ii) BPS හා BQR සමකෝණික ත්‍රිකෝණ බව සාධනය කරන්න.

(iii) $BP : BQ = BS : BR$ බව සාධනය කරන්න.

(b) දී ඇති රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු මත



(i) $\frac{PQ}{BC} = \frac{AQ}{AC}$ බව සාධනය කරන්න.

(ii) $\frac{PQ}{BC} = \frac{RT}{RC}$ බව සාධනය කරන්න.

8. (a) $y = x\,(x - 2)$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ඇඳීම සඳහා $-3 \leq x \leq 5$ තුළ අගය වගුවක් සකස් කරන්න.

(b) x හා y අක්ෂ සඳහා සුදුසු පරිමාණයක් යොදා ගනිමින් $y = x\,(x - 2)$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

(c) ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන්

(i) ප්‍රස්තාරයේ සමමිතික අක්ෂයේ සමීකරණය

(ii) ශ්‍රිතයේ අවම අගය

(iii) ශ්‍රිතයේ අගය 0 වන්නා වූ x හි අගයයන්

(iv) $x\,(x - 2) = 0$ හි මූලයන්

(v) ශ්‍රිතය සෘණ වන්නා වූ x හි අගය පරාසය ලියා දක්වන්න.

(d) $y = x^2$ ප්‍රස්තාරය ඇඳ, ප්‍රස්තාරය ඇසුරෙන් $\sqrt{2}$ හි අගය ආසන්න පළමු දශමස්ථානයට සොයන්න.

පාරිභාෂික ශබ්ද මාලාව

අ		
අවම අගය	குறைந்த பெறுமானம்	Minimum value
අඥාතය	தெரியாக் கணியம்	Unknown
අනුමේය	ஏறிகள்	Rider
උ		
උපරිම අගය	கூடிய பெறுமானம்	Maximum value
ග		
ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪී	பெருக்கல் விருத்தி	Geometric progression
ජ		
ජාල රේඛය	வலையுரு வரையம்	Histogram
ද		
දත්ත	தரவு	Data
ප		
පන්තියක තරම	வகுப்பின் பருமன்	Class width
පන්ති මායිම්	வகுப்பு ஓரங்கள்	Class Boundaries
පන්ති සීමා	வகுப்பு எல்லைகள்	Class Limits
පසු පදය	அடுத்துள்ள உறுப்பு	Successive Term
පන්ති ප්‍රාන්තර	வகுப்பாயிடை	Class intervals
පළමුවන පදය	முதலாம் உறுப்பு	First Term
පරාසය / ප්‍රාන්තරය	வீச்சு	Range
පෙර පදය	அடுத்து வரும் உறுப்பு	Preceding Term
පොදු අනුපාතය	பொது விகிதம்	Common Ratio
ම		
මාස ඒකක ගණන	மாத அலகுகளின் எண்ணிக்கை	Number of month units
මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය	நடுப்புள்ளி	Mid point
ව		
වර්ග පූරණය	வர்க்கப் பூர்த்தியாக்கல்	Completing the Square
වර්ගජ සමීකරණ	இருபடிச் சமன்பாடுகள்	Quadratic Equation
වසම	ஆட்சி	Domain
වාරිකය	தவணைகள்	Instalment
වැල් පොලිය	கூட்டு வட்டி	Compound Interest
විලෝමය	மறுதலை	Converse
විවික්ත දත්ත	பின்னமான தரவுகள்	Discrete data
විසඳුම	தீர்வுகள்	Solutions
ශ		
ශ්‍රිතය	சார்பு	Function
ස		
සංඛ්‍යා අනුක්‍රම	எண் தொடரி	Number Sequence
සංඛ්‍යාත බහුඅස්‍රය	மீடிறன் பல்கோணி	Frequency polygon
සංඛ්‍යාතය	மீடிறன்	Frequency
සංගුණකය	குணகம்	Coefficient
සත්‍යාපනය	வாய்ப்புப் பார்த்தல்	Verification
සාධනය	நிறுவல்	Proof
සන්තතික දත්ත	தொடரான தரவுகள்	Continuous data
සමගාමී සමීකරණ	ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள்	Simultaneous equations
සමමිති අක්ෂය	சமச்சீர் அச்சு	Axis of symmetry
සමානුපාතික	விகித சமனான	Proportional
සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය	திரள் மீடிறன்	Cumulative Frequency
සමුච්චිත සංඛ්‍යාත වක්‍රය	திரள் மீடிறன் வரைபு	Cumulative Frequency curve
හ		
හීනවන ශේෂය	குறைந்து செல்லும் மீதி	Reducing Balance
හැරුම් ලක්ෂ්‍යය	திரும்பற் புள்ளி	Turning point

පාඩම් අනුක්‍රමය

පෙළපොතේ පරිච්ඡේදය	කාලච්ඡේද ගණන
1 වාරය	
1. තාත්වික සංඛ්‍යා	10
2. දර්ශක හා ලඝුගණක I	08
3. දර්ශක හා ලඝුගණක II	06
4. ඝන වස්තුවල පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය	05
5. ඝන වස්තුවල පරිමාව	05
6. ද්විපද ප්‍රකාශන	04
7. වීජීය භාග	04
8. සමාන්තර රේඛා අතර තලරූපවල වර්ගඵලය	12
2 වාරය	
09. ප්‍රතිශත	06
10. කොටස් වෙළෙඳපොළ	05
11. මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය	05
12. ප්‍රස්තාර	12
13. සමීකරණ	10
14. සමකෝණික ත්‍රිකෝණ	12
15. දත්ත නිරූපණය හා අර්ථකථනය	12
16. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි	06
3 වාරය	
17. පයිතගරස් ප්‍රමේයය	04
18. ත්‍රිකෝණමිතිය	12
19. න්‍යාස	08
20. අසමානතා	06
21. වෘත්ත චතුරස්‍ර	10
22. ස්පර්ශක	10
23. නිර්මාණ	05
24. කුලක	06
25. සම්භාවිතාව	07